

UNIVERZITET U BEOGRADU

Mikrometeorologija

Rajković Borivoj
Mesinger Fedor

BEOGRAD
March 13, 2002

Sadržaj

1	Priroda kretanja u graničnom sloju	4
1.1	Uvod	4
1.2	Priroda kretanja u najnižim slojevima atmosfere	5
1.3	Definicije srednjih vrednosti	10
1.4	Jednačine za srednje vrednosti	13
1.5	Jednačine za srednje vrednosti i fluktuacije u indeksnoj notaciji	17
1.6	Jednačine za energiju kod turbulentnih tokova	19
2	Empirijske teorije turbulencije	22
2.1	Uvod	22
2.2	Turbulencija u graničnom sloju toka homogenog fluida preko ravne ploče	23
2.3	Stratifikovani fluidi	29
2.4	Teorija sličnosti Monin-Obuhov	32
2.4.1	Lokalna slobodna konvekcija	39
2.4.2	Veoma stabilna atmosfera	41
2.5	Ričardsonov broj.	42
2.6	Izmešani sloj	44
3	Statističke teorije turbulencije	52
3.1	Korelacione funkcije, integralni i mikrorazmer	52
3.2	Tenzor korelacije	62
3.3	Elementi spektralne analize	64
3.4	Teorija sličnosti	70

3.5	Kolmogorovljeva teorija mikroturbulencije; Strukturna funkcija	75
3.6	Prostorne i vremenske razmere kod homogene i izotropne turbulencije	77
3.7	Turbulentna difuzija	81
3.7.1	Tejlorova teorema	82
3.7.2	Ričardsonova teorija	85
4	Teorije zatvaranja	90
4.1	Empirijske teorije zatvaranja	90
4.1.1	Hipoteza koeficijenta razmene	90
4.1.2	Teorija puta mešanja, Prantlova teorija	92
4.2	Teorije zatvaranja višeg reda	95
4.2.1	Zatvaranje drugog reda	95
4.2.2	Razmerna analiza sistema dobijenog zatvaranjem jednačina drugog reda	101
4.2.3	Aproksimacije jednačina u slučaju PGS-a	109
4.3	Zatvaranje trećeg reda	116
A	Elementi teorije graničnog sloja	119
B	Računanje flukseva količine kretanja i toplote pomoću Monin-Obuhov teorije	126
B.1	Uvod	126
B.2	Nestabilna i neutralna stratifikacija	127
B.3	Stabilna stratifikacija	128
C	Elementi tenzorske algebre	135
C.1	Indeksna notacija	135
C.2	Simetrični i antisimterični tenzori	137
C.3	Izotropni tenzori	138
C.4	Vežbe	138
D	Izvodjenje jednačine za turbulentnu kinetičku energiju	140
E	Teorema $\overline{abc} \leq \sqrt{a^2 [b^2 c^2 - \overline{bc}^2]}$	143
F	Ergodiska teorema, jedan dovoljan uslov za njeno važenje	145

G	Businessk aproksimacije	149
H	Osnovi dimenzionalne analize	153
H.1	Uvod	153
H.2	Dimenzionalne i bezdimenzionalne veličine	153
H.3	Osnovne i izvedene veličine	154
H.4	Dimenzije fizičkih veličina	158
H.5	Π teorema	161
H.6	Primena Π teoreme	163

Uvod

Ova knjiga je nastajala u poslednjih 15-ak godina u dve etape. Prva etapa je bila usredsređena na njeno koncipiranje. Zatim je, tokom pisanja, uz male promene kako u pogledu materije tako i u pogledu stila formirana konačna verzija. I na kraju je oblikovana u tehničkom smislu.

Polaznu osnovu su činili beleške iz kursa mikrometeorologija koji je Fedor Mesinger držao nekoliko godina kao i beležaka sa kurseva sa i poslediplomskih studija koje je Borivoj Rajković slušao na Prinstonskom univerzitetu. Tu je posebno važno naglasiti kurs koji je držao Džordž Melor za slušaocce druge godine poslediplomskih studija ali i kursa opšte okeanologije koji se takodje on držao a u kome se dotiče pitanja graničnog sloja.

Kada se piše o turbulenciji mogući su naravno kao i u skoro svakom poslu razni pristupi. Ali nama se čini kao da ipak postoje dve osnovne mogućnosti. Baviti se njome kao fizikim fenomenom i pokušati dati što rigorozniji matematički opis ili se opredeliti za pragmatičniji pristup koji za cilj ima formiranje zaokružene celine, slike o fenomenu turbulentnog toka. Kao drugi ili ipak jednako važan i osnovan cilj želeli smo da se dodje do sistema jednačina koji moć da posluži kao osnova za numerička izračunavanja potrebna u modelima za prognozu vremena. Ovo je uostalom i prirodan put za kurs na Meteorologiji a naročito na Meteorologiji fizikog fakulteta u Beogradu sa jakom tradicijom u modeliranju atmosfere.

Što se tiče savladjivanja gradiva ovog predmeta mormo da upozorimo čitaoca da ovo materija nije nimalo pitka. Komplikovan matematički opisa fenomena turbulencije zatvara mogućnost formalnog tretiranja. Zato se mora mnogo toga prebaciti na teren empirije, podaci, labaratorijska merenja pa čak i vizuelna osmatranja. U osnovi problema je veliki raspon u razmerama kretanja, čak više dekada, ali za razliku od dinamičke meteteorologije gde ili lineraizacijom ili razmernom analizom uspevamo da značajno redukujemo broj razmera koje su od značaja za problem, ovde moramo da stalno imamo čitav spektar. Imajući ovo u vidu našavet čitaocu je da ne posustaje jer će nakon drugog čitanja stvari biti mnogo jasnije i razumljivije. Možda će i dalje biti onog "aha" posle koga ne sledi neka formula već možda samo satenje lagodnosti kada se nešto rzume ali teško jednostavno ili kratko iska ze.

U prve tri glave struktura ove knjige prati strukturu pomenutog kursa profesora Melora. Prva glava opisuje fenomen turbulentnog toka, a zatim se postavlja matematički okvir za njegov opis. Centralna tema je Rejnoldsova ideja o razlagnju trenutnog (pravog) signala na srednji tok i fluktuacije. Analizirane su fizičke i matematičke konsekvence toga i formirane su jednačine koje opisuju vremensku evoluciju svih uvedenih veličina. Nakon razmatranja energetskih odnosa glava je završena konstatacijom da je dobijeni sistem otvoren tj. konstatovan je problem "zatvaranja". Kako se tu negde i završava domet formalnom prilazu matematičke analize turbulentnih tokova dolazi druga glava koja treba zajedno sa trećom glavom da omogući eventualno "zatvaranje" sistema jednačina za turbulentne tokove. Ona je nazvana "Empiriske teorije turbulencije jer manje više sve što je u njoj dato je parktično uobličavanje rezultata merenja, kako u laboratorijama tako i u atmosferi odnosno okeanu. Kao vrhunac tog posla je svakako teorija Monina i Obuhova koja daje fizičku sliku ali i zakone koji omogućuju kvantitativno računanje kako srednjih veličina tako u flukseva razniv veli cina u površinskom sloju. Treća glava daje prikaz statističkog opisa veličina koje karakterišu turbulentne tokove i tu je centralno mesto rezervisano za pojam korelacione funkcije. kao drugi deo se razmatra teorija spektra. Kao vrhunac se javlja teorija Kolmogorova koja je jedan od dva ugaona kamena teorije zatvaranja. I konačno u četvrtoj glavi se ponovo vraćamo na problem zatvaranja sistema jednačina koji opisuje turbulentne tokove. Polazeći od hipoteza Kilmogorova i Rote formiran je zatvoren sistem jednačina za momente drugog reda. Konačno je data razmerna analiza dobijenog sistema jednačina kao i njegovo sistematsko redukovanje na sistem sa dve prognostičke promenljive (nivo 3) i na potpuno dijagnostički sistem (nivo 2). na kraju je serija do-dataka koji sadrže elemente teorije graničnog sloja, računanje flukseva količine kretanja i toplote pomoću Monin-Obuhov teorije, elemente tenzorske algebre, izvodjenje jednačina za Rejnoldsove napone kao i za flukseve toplote, nejednakost koja se sreće kod ztvaranja trećeg reda, jedan dovoljan uslov za njeno važenje Ergodiske teoreme, jednačina kretanja u Businessk aproksimaciji i na kraju Dimenzionu analizu.

Kako je ova knjiga nastajala tokom niza godina mnoge naše kolege i studenti su bili aktivni učesnici i na neki način čak i koautori. Naročito se zahvaljujemo kolegama Zaviši Janjiću i Dragutinu Mihailoviću i kao recenzentima ali i kao dugogodišnjim saradnicima sa kojima smo kroz mnogobrojne diskusije oformljavali ili precizirali mnoge ideje koje se javljaju u ovoj knjizi, što je značajno uticalo na kvalitet ove knjige. Pažljivim čitanjem i komentarisanjem poslednbje verzije kolega Milivoj Gavrilov je bio od velike pomoći.

Generacije studenata su se sudarale sa relativno brojnim i pomalo glomaznim izvodjenjima i konačno dovele do, nadano se, teksta bez grešaka. Tu su na prvom mestu Dusan Jović koji je i označio kraj prvog perioda u nastajanju ove knjige formiranjem "Eričanske varijante" koja je u preiodu od 1995 do sada bila na raspolagnju studenta. Dule Jović je zaslužan i za konačan izgled ove knjige jer nas je nagovorio i uputio u LateX-ovanje i na smom kraju Marija studentkinja četvrte godine koja je krajnje

pažljivo prgledala ceo tekst. Time će kjiga, mi se nadamo, dobiti na preglednosti i čitljivosti. Pored njih dvoje moramo da pomenemo nekadašnje studnte a sada koleginice i kolege, Ljiljanu Dekić, Vericu Savić, Jelenu Tanasijević, Lea Šeparovića, Vladimira Djurdjevića, Iliju Arsenijevića, Branislavu Lalić, Zlaticu Popov i mnoge druge. Kolega Djurdjević je pomogao i oko konačne obrade slika a koleginica Popov je krajnje pedantno prošlo kroz sva izvodjenja u ovoj, končnoj verziji teksta. Svim ovim kolegini-cama i kolegama se iskreno zahvaljujemo jer bez njih i njihovog doprinosa možda ova kjiga nebi ni bila napisana.

*Borivoj Rajković
Fedor Mesinger*

Priroda kretanja u graničnom sloju

1.1 Uvod

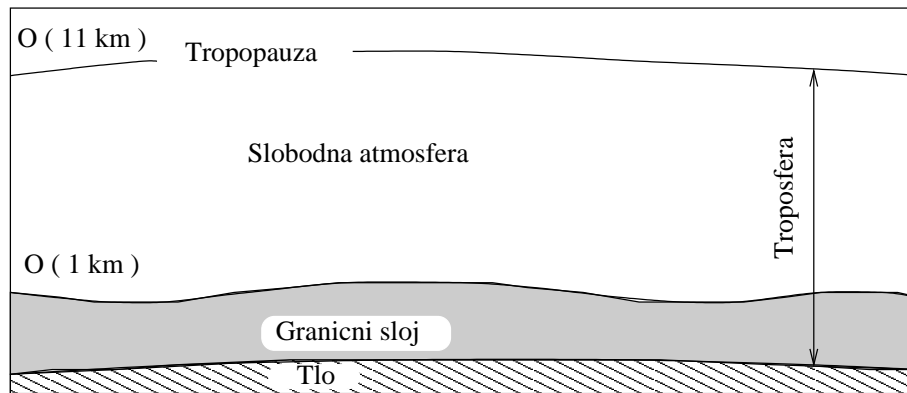
Ova glava je posvećena prikazu osnovnih karakteristika atmosfere u blizini tla ($\approx 1km$). Uveden je pojam turbulentnog kretanja i date su njegove osnovne karakteristike. Zatim je dat jedan moguć pristup matematičkom opisu takvog kretanja kod koga se trenutni signal posmatra kao *zbir* relativno sporo promenljivog dela (i u vremenu i u prostoru) tzv. srednjeg toka i brzo promenljivog dela (i u vremenu i u prostoru) tzv. odstupanja. I na kraju je data analiza nekih energetske transformacije između srednjeg toka i odstupanja. Treba imati na umu da nakon ovog razdvajanja kada se govori o turbulenciji misliće se na ovaj drugi deo toka. Tako se onda govori o razmeni energije između srednjeg toka i "turbulencije" ili o pretvaranju kinetičke energije srednjeg toka u turbulentnu kinetičku energiju.

O opštim karakteristikama atmosfere, u blizini tla, i vrsti kretanja kao i o procesima u njoj dodatne informacije se mogu naći u knjigama Stula(24), Monina i Jagloma(19), Hinzea(5), Lamlija i Panofskog(13), Buisngera(2), Satona (25), Tenekesa i Lamlija(28) i Glajka(4). Knjige Stula(24), Buisngera(2), Tenekesa i Lamlija(28) i Lamlija i Panofskog (13) daju osnovne ideje o kretanju i karakteristikama atmosfere u blizini tla. Referenca Saton(25) je malo starija ali je veoma interesantna jer se u njoj jasno vide sve dileme sa kojima se srećemo kada pokušavamo da razumemo procese koji se dešavaju u fluidu koji je u turbulentnom režimu kretanja. Knjige Hinzea(5) a pogotovu Monina i Jagloma(19) su matematički

rigoroznije od prethodnih. I na kraju referenca Glajk(4) koja i nije u strogom smislu reči knjiga iz koje se "uči" ali je veoma interesantna za čitanje i može da posluži kao uvod u problematiku turbulentnog kretanja i što je možda još važnije da se vidi istorija ideja vezanih za probleme kod kojih je haotičnost dominantna crta.

1.2 Priroda kretanja u najnižim slojevima atmosfere

Prema karakteristikama kretanja i uopšte prema procesima koji se dešavaju u prvih desetak (8-16) kilometara atmosfere, tzv. troposfera se deli na granični sloj i slobodnu atmosferu (slika 1.1). Razlog

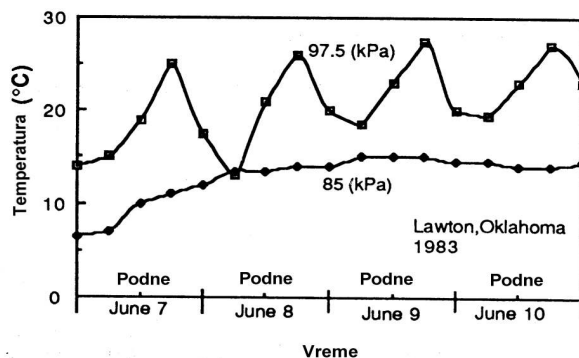


Slika 1.1: Shematski prikaz vertikalnog preseka kroz troposferu, (prema Stulu (24))

postojanja dva režima kretanja je prisustvo tla. Površina Zemlje ima višestruki značaj za procese u atmosferi. Najveći deo toplote atmosfera prima od podloge. Zemljina površina, kako mora i jezera tako i kopno su izvori vodene pare i jezgara sublimacije i kondenzacije. Vetar u najnižim slojevima atmosfere je pod uticajem kako orografije tako i stepena zagrejanosti tla. Temperatura tla je usled razlika u sastavu tla često nehomogena. Ova nehomogenost u zagrevanju je uzrok lokalnih cirkulacija. Uopšte, kad god se javljaju nehomogenosti kod podloge pojavljuju se lokalne cirkulacije razmera nehomogenosti. Tipičan primer je vetar s mora, a vetar s kopna, odnosno kretanje uz i niz planinu. Ova kretanja, koja ne moraju da deluju naročito impresivno u poredjenju sa nekim drugim, koje srećemo u atmosferi recimo intenzivnim

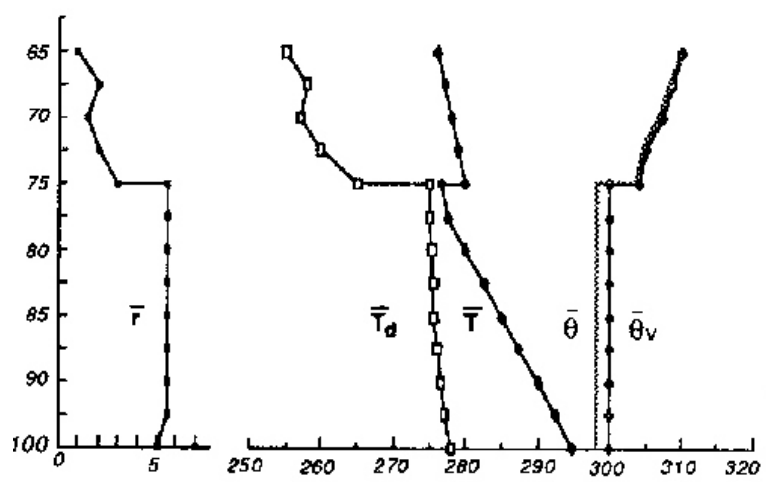
frontalnim cirkulacijama, u eri ozbiljnih ekoloških problema mogu biti i te kako važna. Na primer kod velikih gradova na obalama mora, Los Andjeles, Atina, Šangaj itd. u letnjim epizodama foto smoga i te kako razumeju blagotvorno dejstvo tih lokalnih cirkulacija.

Razlika između graničnog sloja i slobodne atmosfere se jasno uočava kako u poljima kretanja tako i u poljima termodinamičkih veličina. Merenja su vršena sa radiosonom lansiranom iz Ft. Sill, Oklahoma,



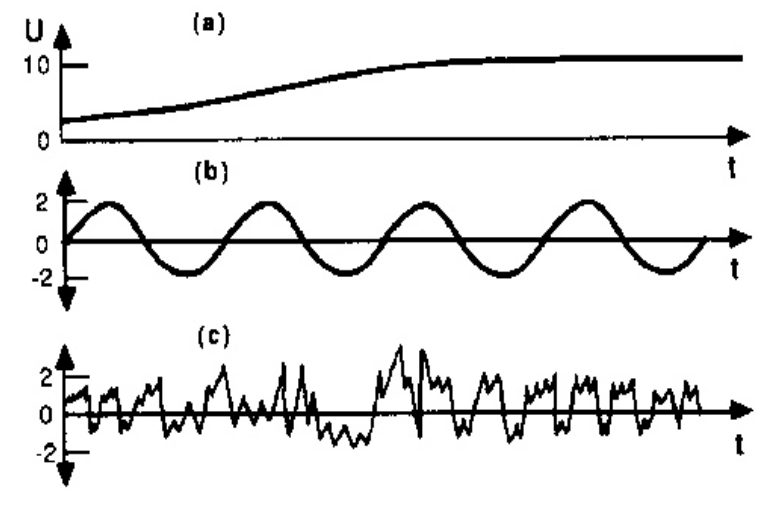
Slika 1.2: Evolucija temperatura merenih blizu tla (9.75 kPa) i na visini oko 1100 m (850 kPa). Merenja su vršena sa radiosonom lansiranom iz Ft. Sill, Oklahoma, SAD, (prema Stulu (24))

SAD, (prema Stulu (24)). Na slici (1.2) prikazan je zapis temperature na 85 kPa (oko 1100 m) i na 97.5 kPa (pri tlu) u toku četiri dana. Kod krive temperature pri tlu jasno se vidi dnevni hod. Za razliku kriva temperature na 85 kPa ima tendenciju rasta kao posledicu procesa koji imaju vremenske razmere od više dana. Drugi način da se upozna vertikalna struktura graničnog sloja su tzv. mikro sonde koje se zakače za balone koji zatim dižu sonde od tla do visine od par kilometara. Na slici (1.3) prikazani su vertikalni profili temperature (T), tačke rose (T_d), potencijalne temperature (Θ), virtuelne potencijalne temperature (Θ_v) i sadržaja vodene pare (r) dobijeni pomoću mikro sondi. U blizini nivoa 75 kPa se jasno uočava skokovita promena u svim veličinama tako da se može uzeti da u ovom slučaju on predstavlja granicu između slobodne atmosfere i graničnog sloja. Prikaz prirode specifičnosti kretanja u blizini tla se može dobiti i ako bismo registrovali vetar ili temperaturu u nekoj tački ali sa specijalnim instrumentima koji su u stanju da registruju veoma brze promene. Uočili bismo tada veoma komplikovane zapise haotičnog karaktera kao na grafiku (c) na slici (1.4). Veoma je jasan kontrast u odnosu na signal srednjeg vetra koji



Slika 1.3: Tipični profili temperature (T), tačke rose (T_d), potencijalne temperature (θ), virtualne potencijalne temperature (θ_v) i sadržaja vodene pare (r) dobijeni mikro sondom, (prema Stulu (24))

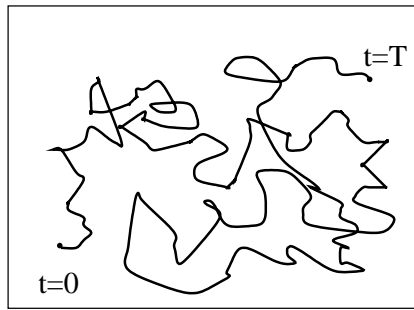
je dobijen nekim od klasičnih instrumenata ili u poredjenju sa promenama brzine kod prostiranja talasa. Kretanje koje se odlikuje haotičnošću ovog tipa naziva se *turbulentno* za razliku od uredjenog kretanja fluida koje se naziva *laminarno*. Da bi razumeo prirodu ove razlike Osborn Reynolds je 1883. g. izveo svoje čuvene eksperimente. U tim eksperimentima tečnost iz velikog rezervoara ističe kroz dugu i tanku cev, pažljivo izolovanu od potresa. Priroda strujanja u cevi je učinjena vidljivom puštanjem tankog konca boje kroz jednu pomoćnu cev. Ako je kretanje tečnosti kroz cev dovoljno sporo končić boje teče kroz cev skoro bez širenja i mešanja sa okolnom tečnošću. Međutim, kada se brzina strujanja vode poveća preko izvesne granice dolazi do promene karaktera kretanja; končić boje se brzo širi i potpuno izmeša sa tečnošću. Prvi tip kretanja je i laminarno kretanje, a drugi turbulentno kretanje. Dugotrajnim eksperimentisanjem i analiziranjem raznih slučajeva Reynolds je zaključio da način kretanja tj. da li je u pitanju laminarno ili turbulentno kretanje može da se okarakteriše jednim brojem, bezdimenzionalnom kombinacijom ud/ν , gde je u srednja brzina fluida, d prečnik cevi, a ν kinematički koeficijent viskoznosti fluida. Ovako definisana kombinacija se naziva Reynoldsov broj i biće označavana sa Re . Ovo je jedan



Slika 1.4: Idealizovani primeri srednjeg vetra (a), talasa (b) i turbulencije (c) (prema Stulu (24)).

od osnovnih parametara u teoriji turbulentnog kretanja, jer prelaz iz laminarnog u turbulentno kretanje nastupa ako je Re jednak ili veći od oko 2 000. Ipak, ova granica se ne može definitivno postaviti. Problem nastupa ako se zahteva jednoznačna veza između prelaza jednog toka u drugi i vrednosti Reynoldsovog broja, tj. da li postoji kritičan Reynoldsov broj, Re_{kr} , takav da jasno razgraničava prelaz u turbulentni tok iz laminarnog. I drugo, ako smo u turbulentnom režimu i smanjujemo Re , na primer smanjenjem brzine, u jednom momentu dolazi do prelaza u laminarni tok. Da li je to isti onaj broj kod koga je nastupio prelaz iz laminarnog u turbulentno kretanje? Odgovor je **ne**, jer pri pažljivom povećanju brzine kod laminarnog kretanja moguće je održati laminarnost toka čak i do vrednosti Re -a od 12 000, ali i pri najmanjem potresu kretanje trenutno prelazi u turbulentno. Sa druge strane ako je Re manji od oko 1000 bilo koliko veliki poremećaji ne mogu da kretanje učine trajno turbulentnim. Preciznu definiciju turbulentnog kretanja nije moguće dati pa je uobičajeno da se turbulentno kretanje naziva ono kretanje koje poseduje sve sledeće osobine ¹

¹pristup definisanju pojma turbulencije je prema knjizi Tenekesa i Lamlija (28)



Slika 1.5: Shematski prikaz trajektorija delića u turbulentnom toku

- *Neuredjenost* : Najuočljivija osobina turbulentnog kretanja je neuredjenost ili haotičnost. Ako recimo pratimo putanju delića (Lagranžov prikaz) u turbulentnom toku ona je veoma komplikovana, bez ikakvih znakova regularnosti. Jedan od parametara koji bi ukazao na nekakvu regularnost je da li posle makar i jako dugog ali konačnog vremena putanja prodje kroz polaznu tačku ili bar veoma blizu. To bi značilo da se ispoljila nekakva periodičnost ili makar kvaziperiodičnost. U tom pogledu turbulencija se karakteriše potpunim odsustvom periodičnosti. Opet napominjemo da su granični uslovi u granicama mogućnosti merenja konstantni. Već smo se ranije sreli sa Ojlerovim načinom zapisivanja kod turbulentnog polja (sl. 1.4). I kod ovakvog načina prikazivanja veličina kod turbulentnog toka jasno se uočava haotičan karakter zapisa. Neuredjenost ima ozbiljne reperkusije na teorijsko razmatranje turbulentnog kretanja. Tako, za sada, izgleda da se moramo odreći determinističkog pristupa pri kom se može polazeći od početnih položaja i brzina svih delića predvideti dalja istorija sa proizvoljnom tačnošću. Umesto toga koriste se ili statistički metodi ili se pokušavaju izračunati integralni doprinosi lokalnih haotičnosti.
- *Difuzivnost*: Transporti raznih veličina su mnogo intenzivniji od transporta zbog molekularnog kretanja. Ovo je u praktičnom pogledu najvažnija osobina turbulentnog kretanja.
- *Veliki Reynoldsovi brojevi*: Reynoldsov broj je moguće opštije definisati kao odnos karakterističnih

vrednosti inercijalnih sila i sila viskoznosti:

$$Re = \frac{\text{Inercijalne sile}}{\text{Viskozne sile}} = \frac{u \frac{\partial u}{\partial x}}{\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} = \frac{\frac{U^2}{L}}{\frac{\nu U}{L^2}} = \frac{UL}{\nu} \quad (1.1)$$

Turbulentno kretanje se uvek događa pri velikim vrednostima Rejnoldsovog broja.

- *Trodimensionalnost i vrtložnost* : Prava turbulentna kretanja su trodimenzionalna i karakterišu se relativno velikim vrednostima rotora vektora brzine, koja još imaju izrazito fluktuirajući karakter. Na primer, talasi stvoreni vetrom na površini okeana, iako daju krajnje komplikovanu sliku, nisu turbulentno kretanje, zato što je rotor brzine zanemarljiv u poredjenju sa divergencijom brzine.
- *Disipativnost* : Turbulentno kretanje je disipativno; da bi se održalo potreban je izvor energije. Tako na primer slučajni gravitacioni talasi ili zvučni talasi nisu turbulentno kretanje.
- *Turbulentnost je karakteristika kretanja* : Turbulentnost nije osobina fluida, već kretanja. Drugim rečima, to je kinematička, a ne fizička osobina.
- *Kontinuum* : Na analizu turbulentnog kretanja može da se primeni aparat mehanike fluida, tj. predstava o kontinuaranoj sredini. Nema turbulentnog kretanja na molekularnim razmerama; najmanji elementi turbulentnog kretanja su za nekoliko redova veličine veći od molekulskih razmera. Tako se mogu koristiti jednačine hidrodinamike. Napominjemo da je ovde samo ovlaš spomenut, više kao metafora, pojam o turbulentnom elementu (elementima). Preciziranje ovog, jednog od osnovnih pojmova turbulentnog polja (toka) će se događati u toku čitavog kursa iz više komplementarnih uglova.

1.3 Definicije srednjih vrednosti

Pored definisanja turbulencije drugi osnovni problem je konstruisanje jednačina koje treba da opisuju turbulentne tokove. Reynolds je predložio da se turbulentni tok razmatra kao složeni fenomen sastavljen od srednjeg dela toka i haotičnog dela toka. Pretpostavka je da su vremenski i prostorni razmeri uredjenog (srednjeg) dela toka znatno duži odnosno veći od haotičnog dela toka. Sam Reynolds nije znao da li su takve pretpostavke zaista ispunjene kod turbulentnih tokova koji se sreću u atmosferi ili uopšte kod kretanja fluida. Tako simbolično pišemo da je trenutna (prava) vrednost, obeležena sa znakom tildai

() iznad slova, zbir srednje vrednosti, veliko slovo, i odstupanja od srednje vrednosti (u daljem tekstu samo odstupanje), malo slovo, za x , y i z komponente brzine :

$$\tilde{u} = U + u \quad (1.2)$$

$$\tilde{v} = V + v \quad (1.3)$$

$$\tilde{w} = W + w \quad (1.4)$$

potencijalnu temperaturu :

$$\tilde{\theta} = \Theta + \theta \quad (1.5)$$

relativnu vlažnost :

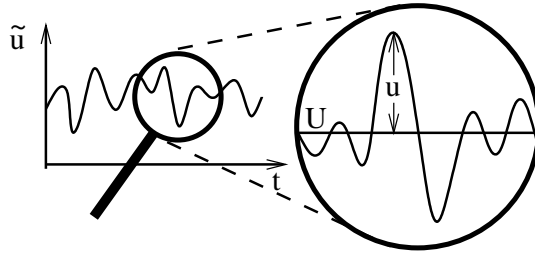
$$\tilde{q} = Q + q \quad (1.6)$$

neku pasivnu supstancu (polutant, traser,...) :

$$\tilde{c} = C + c \quad (1.7)$$

Odnos srednje vrednosti i odstupanja je ilustrovan na slici (1.6). Postoji više mogućih načina definisanja srednjih vrednosti i odstupanja. U teorijskim razmatranjima srednje vrednosti su definisane preko ansambla. Ansambl je skup realizacija (dogadjaja) koji imaju istu vrednost svih makroparametara. Pod makroparametrima se podrazumevaju geometrijske karakterisitike, gradijent pritiska koji izaziva kretanje, nepromenjene fizičke karakteristike kao viskoznost itd. Za turbulentno kretanje je karakteristično da se svaki član ansambla, svaka realizacija razlikuje od svih ostalih članova ansambla. Recimo pri proticanju fluida kroz cev, kada je Rejnoldsov broj dovoljno veliki pa je kretanje fluida turbulentno i kada držimo vrednost razlike pritiska na krajevima konstantnom. Ako napravimo zapis brzine u nekom trenutku t , u toku intervala vremena od $(0, T)$, a zatim ponovimo eksperiment N puta uočavamo da se svaki od zapisa razlikuje od ostalih. Svaki od tih zapisa je jedna realizacija, jedan element ansambla. Koja srednja brzina onda karakteriše proticanje fluida kroz cev? Za trenutak t , unutar intervala $(0, T)$ definiše se srednja vrednost po ansamblu kao aritmetički srednjak izmerenih vrednosti iz svih realizacija:

$$U(t_0) \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{u}_i(t_0) \quad (1.8)$$



Slika 1.6: Detaljniji prikaz promene vetra sa slike (1.4) sa naznačenim odstupanjem kao i srednjom vrednošću, (prema Stulu (24))

Ovako definisana srednja vrednost nije pogodna za eksperimentalna razmatranja. Kod laboratorijskih merenja ili osmatranja najčešće se srećemo sa srednjom vrednošću definisanom kao srednjak u vremenu ili prostoru. Recimo u vremenu, srednja vrednost se definiše kao:

$$U(t_0) = \frac{1}{T} \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} \tilde{u}(t') dt \quad (1.9)$$

i analogno u prostoru, s tim što se integracija po vremenu zamenjuje integracijom po koordinati (koordinatama). O odnosu izmedju srednjih vrednosti po ansamblu i srednjaka u vremenu ili prostoru govori ergodiska hipoteza (videti Dodatak F). Tako, za dovoljnu dužinu intervala osrednjavanja T i dovoljno veliki broj realizacija, srednje vrednosti po ansamblu i vremenski srednjak se zanemarivo razlikuju. Preciznije određenje odnosno jedna varijanta ergodiske teoreme (hipoteze) je dat u već pomenutom dodatku.

I na kraju, najopštiji način definisanja osrednjavanja je preko operatora (operacije) osrednjavanja, pri čemu se postuliraju njegove osobine preko skupa pravila. Sa gornjom crtom ćemo označiti dejstvanje operatora osrednjavanja. Tada definišemo osobine operatora osrednjavanja:

$$\overline{\tilde{f} + \tilde{g}} = \overline{\tilde{f}} + \overline{\tilde{g}} = F + G \quad (1.10)$$

$$\overline{C\tilde{f}} = C\overline{\tilde{f}} = C F \quad (1.11)$$

$$\bar{C} = C \quad (1.12)$$

$$\overline{\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial s}\right)} = \frac{\partial}{\partial s} (\tilde{f}) = \frac{\partial F}{\partial s} \quad s = x, y, z, t \quad (1.13)$$

$$\overline{F \tilde{g}} = F G \quad (1.14)$$

Na slici (1.7) je dat prikaz odnosa nagiba neke veličine pre i posle osrednjavanja. Geometrijski gledano, uočavamo da je nagib srednje vrednosti daleko manji nego nagib trenutne vrednosti. Ova naizgled jednostavna karakteristika je od fundamentalnog značaja kod razmatranja turbulentnih tokava i mogućih izračunavanja vezanih za njih. Nagib srednje vrednosti zavisi, u opštem slučaju, od perioda osrednjavanja. Medjutim postoje vremenski odnosno prostorni intervali nakon kojih srednje vrednosti potpuno izgube haotični deo signala. (Ovo će biti razmatrano u trećoj glavi nakon uvođenja pojma spektra turbulentne kinetičke energije gde će se pokazati postojanje tzv. spektralnog jaza).

Zadatak : Na osnovu aksioma operatora srednje vrednosti naći srednju vrednost proizvoda dve slučajne (haotične) veličine.

Rešenje : Na osnovu (1.10), pišemo:

$$\overline{\tilde{u}\tilde{w}} = \overline{(U + u)(W + w)} = \overline{UW} + \overline{Uw} + \overline{Wu} + \overline{uw} \quad (1.15)$$

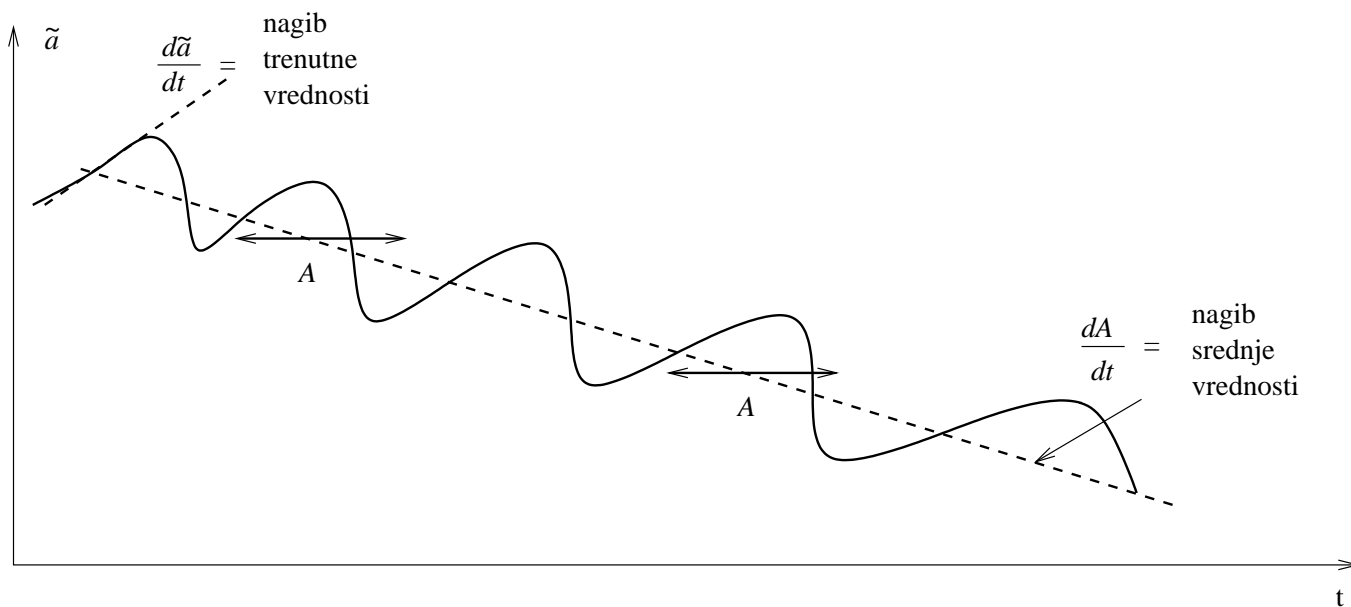
Primena (1.14) daje:

$$\overline{\tilde{u}\tilde{w}} = UW + \overline{uw} \quad (1.16)$$

Dakle iako je srednja vrednost odstupanja jednaka nuli kada se pojavi proizvod fluktuacija, njegova srednja vrednost je **različita od nule**.

1.4 Jednačine za srednje vrednosti

Nakon uvođenja pojma srednjih vrednosti treba formirati jednačine koje će opisivati njihovu evoluciju kako u vremenu tako i u prostoru. Kako smo ranije videli da je viskoznost fluida jedna od njegovih bitnih karakteristika koja može da dovode do pojave turbulentnog toka, mora se poći od Navije-Stoksovih



Slika 1.7: Shematski prikaz odnosa nagiba srednjih vrednosti prema nagibu trenutne vrednosti. Period osrednjavanja je predstavljen dužinom horizontalnih strelica, (prema Stulu (24))

jednačina kretanja. Navije-Stoksove jednačine ćemo uzeti uz Businessk aproksimaciju (vidi Dodatak **G**). Potpuni sistem jednačina sadrži još jednačinu kontinuiteta za nestišljiv fluid i jednačinu termodinamike:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{u} - f\tilde{v} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \nu \Delta \tilde{u} \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{v} + f\tilde{u} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \nu \Delta \tilde{v} \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{w} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + g \frac{\tilde{\theta}}{\Theta_0} + \nu \Delta \tilde{w} \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0 \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{\theta} = \alpha \Delta \tilde{\theta} \quad (1.21)$$

gde je v kinematički koeficijent molekulske difuzije a α koeficijent difuzije temperature. Kada uvedemo razlaganje trenutne vrednosti na srednju vrednost i odstupanje (fluktuacije) $\tilde{u} = U + u$ i osrednjimo jednačine, koristeći postulate osrednjavanja dobijamo jednačine za srednje vrednosti:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla U - fV = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{P}{\rho_0} + \overline{uu} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \overline{uv} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{uw} + v\Delta U \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla V + fU = -\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{P}{\rho_0} + \overline{vv} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \overline{vu} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{vw} + v\Delta V \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla W = -\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{P}{\rho_0} + \overline{ww} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \overline{wu} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{wv} + g \frac{\Theta}{\Theta_0} + v\Delta W \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \Theta = - \left[\frac{\partial}{\partial x} \overline{u\theta} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{v\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{w\theta} \right] + \alpha \Delta \Theta \quad (1.26)$$

Ako oduzmemo od jednačina za trenutne vrednosti jednačine za srednje vrednosti tada se dobijaju jednačine za odstupanja (fluktuacije):

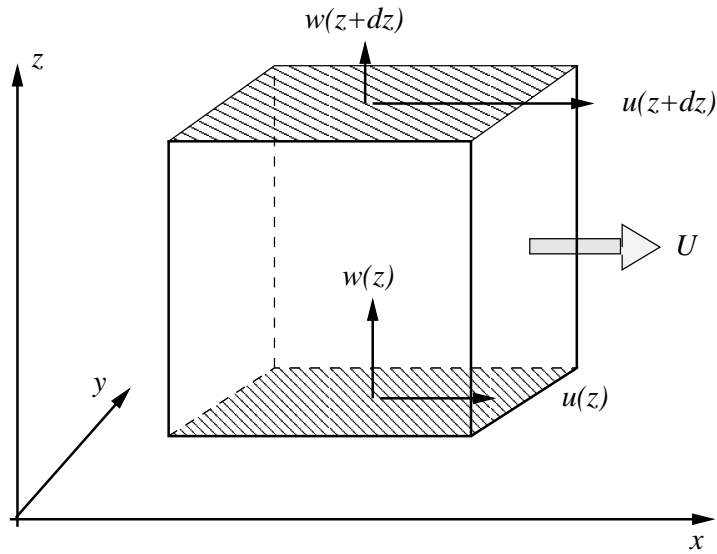
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla U + \mathbf{V} \cdot \nabla u + \mathbf{v} \cdot \nabla u - fv = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{p}{\rho_0} - \overline{uu} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \overline{uv} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{uw} + v\Delta u \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla V + \mathbf{V} \cdot \nabla v + \mathbf{v} \cdot \nabla v + fu = \frac{\partial}{\partial x} \overline{vu} - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{p}{\rho_0} - \overline{vv} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \overline{vw} + v\Delta v \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla W + \mathbf{V} \cdot \nabla w + \mathbf{v} \cdot \nabla w = \frac{\partial}{\partial x} \overline{wu} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{wv} - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{p}{\rho_0} - \overline{ww} \right] + g \frac{\theta}{\theta_0} + \nu \Delta w \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.30)$$

Uočavamo da se u jednačinama za srednje vrednosti na desnoj strani javljaju novi članovi, pored očekivanih članova, srednjih vrednosti za silu gradijenta pritiska i viskoznost. Prema drugom Njutnovom zakonu ti novi članovi su nekakve sile, preciznije sile za jediničnu masu. Tako, kao posledica jedne matematičke operacije (razlaganja na srednje vrednosti i odstupanja) javljaju se "nove" sile. Razmotrimo poreklo odnosno smisao ovih novih članova. Na slici (1.8) je prikazana elementarna zapremina koja se kreće srednjom brzinom U u pravcu x -ose. Kada bi kretanje bilo laminarno tada, u odsustvu Koriolisove sile i sile gradijenta pritiska, uočena zapremina bi se kretala bez promene brzine. (To strogo uzev nije tačno jer postoji molekulska difuzija količine kretanja zbog molekulskog kretanja ali ona se može zanemariti za kraće vremenske intervale.) Ako bi jednačine (1.22 - 1.24) pomnožili sa ρ_0 tada bismo govorili o bilansu količine kretanja odnosno o promeni količine kretanja elementarne mase. Novi članovi na desnoj strani bi bili $-\partial_x(\rho_0 \overline{uu})$, $-\partial_y(\rho_0 \overline{uv})$ i $-\partial_z(\rho_0 \overline{wu})$. Oni se nazivaju Rejnoldsovi naponi u jednačinama kretanja odnosno Rejnoldsovi članovi kada se odnose na čitav sistem jednačina koji uključuje i termodinamičku jednačinu. Oni predstavljaju *konvergenciju srednjeg fluksa x-komponente količine kretanja* u uočenoj elementarnoj zapremini. Zaista analizirajmo član $-\partial_z(\rho_0 \overline{wu})$. Njega možemo napisati i na sledeći način: $-\partial_z[\overline{w(\rho_0 u)}]$. Veličina $\rho_0 u$ je x -komponenta količine kretanja, a $w[\rho_0 u]$ je fluks x -komponente količine kretanja kroz jediničnu površinu normalnu na z -osu. Dalje $\partial_z[\overline{w(\rho_0 u)}]$ je razlika flukseva kroz jedinične površine po jedinici dužine tj. divergencija tog fluksa ili neto odliv količine kretanja u pravcu z -ose, pa je $-\partial_z(\rho_0 \overline{wu})$ srednji neto priliv x komponente količine kretanja u pravcu z -ose u uočenu elementarnu zapreminu. Istom analizom možemo da zaključimo da je $-\partial_y[\overline{v(\rho_0 u)}]$ srednji neto priliv x komponente količine kretanja u pravcu y -ose u uočenu elementarnu zapreminu, a $-\partial_x[\overline{u(\rho_0 u)}]$ srednji neto priliv x komponente količine kretanja u pravcu x -ose u uočenu elementarnu zapreminu. Drugim rečima, u uočenu zapreminu postoji priliv/odliv količine kretanja zbog postojanja odstupanja (fluktuacija) u polju brzine. Naglasimo da je masa fluida u uočenoj zapremini konstantna. Tako, rezimiramo da zbog relativnog kretanja fluktuirajućeg dela toka, u odnosu na uočenu masu koja se kreće srednjom brzinom, dolazi do promene srednje brzine jer svaka promena količine kretanja u jedinici vremena dovodi do ubrzanja/usporenja. Na isti način možemo da analiziramo jednačinu termodinamike. Izraz $\overline{w\theta}$ predstavlja srednji fluks potencijalne temperature kroz jediničnu površinu normalnu na z -osu a $-\partial_z \overline{w\theta}$ je srednji neto priliv potencijalne temperature, u elementarnu zapreminu, iz pravca z -ose. Na isti način



Slika 1.8: Uz objašnjenje $-\partial_z(\rho_0 \overline{wu})$

možemo da analiziramo izraze $-\partial_x(\overline{u\theta})$, $-\partial_y(\overline{v\theta})$. Dakle ako, recimo, topliji fluid koji se kreće relativno u odnosu na jediničnu zapreminu istisne hladniji fluid imamo neto zagrevanje, sve posmatrano iz referentnog sistema koji se kreće srednjom brzinom.

1.5 Jednačine za srednje vrednosti i fluktuacije u indeksnoj notaciji

Prognostičke jednačine dobijaju koncizniju formu u tzv. indeksnoj notaciji. U tom zapisu vektor trenutne brzine \tilde{v} pišemo kao $\{\tilde{u}\}_i$ ili kraće \tilde{u}_i gde indeks i ima vrednosti 1,2,3. Tada jednačina kontinuiteta postaje:

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.31)$$

Ovde je korišćena tzv. Ajnštajnova konvencija o sabiranju ². Za srednje vrednosti, direktnom primenom pravila za osrednjavanje, dobijamo:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.32)$$

Oduzimanjem jednačina kontinuiteta za srednje i trenutne vrednosti dobija se jednačina kontinuiteta za fluktuacije:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.33)$$

Jednačine kretanja i termodinamike, u indeksnoj notaciji i u fluksnom ³ obliku glase:

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_k \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} + \varepsilon_{ilm} f_l \tilde{u}_m = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\delta_{ik} \frac{\tilde{p}}{\rho_0} \right] + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \tilde{u}_i - \delta_{i3} g_i \beta \tilde{\theta} \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} + \tilde{u}_k \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x_k} = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \tilde{\theta} \quad (1.35)$$

gde smo uveli oznaku β za $1/\Theta_0$. Vektor $\mathbf{g} = \{g_i\}$ ima komponente $(0,0,-g)$. Ponavljanjem postupka osrednjavanja dobijaju se jednačine za srednje vrednosti:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \varepsilon_{ilm} f_l U_m = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\delta_{ik} \frac{P}{\rho_0} + \overline{u_i u_k} \right] - \delta_{ik} g_k \beta \Theta + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2} \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + U_k \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} = -\frac{\partial \overline{u_k \theta}}{\partial x_k} + \alpha \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_k^2} \quad (1.37)$$

i analogno kao kod jednačine kontinuiteta, za fluktuacije:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [u_k U_i + u_i U_k + u_i u_k - \overline{u_i u_k}] + \varepsilon_{ilm} f_l u_m = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\delta_{ik} \frac{p}{\rho_0} \right] - \delta_{ik} g_k \beta \Theta + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [U_k \theta + u_k \Theta + u_k \theta - \overline{u_k \theta}] = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k^2} \quad (1.39)$$

²Konvencija o sabiranju glasi da se uvek vrši sabiranje po ponovljenom indeksu.

³Fluksni oblik je $\partial(u_k f)/\partial x_k$ dok je $u_k \partial f/\partial x_k$ advektivi oblik.

1.6 Jednačine za energiju kod turbulentnih tokova

Da bi se formirale jednačine za promenu kinetičke energije srednjeg toka i fluktuacija polazi se od jednačine kretanja koju pomnožimo brzinom U_j . Tako se dobija, koristeći pravila o izvodu proizvoda:

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial}{\partial x_k} [U_k U_i + \overline{u_i u_k}] + U_j \varepsilon_{ilm} f_l U_m = -U_j \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\delta_{ik} \frac{P}{\rho_0} \right] - U_j g_i \beta \Theta + U_j v \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} U_i \quad (1.40)$$

ako se indeksi permutuju jednačine postaju:

$$U_i \frac{\partial U_j}{\partial t} + U_i \frac{\partial}{\partial x_k} [U_k U_j + \overline{u_j u_k}] + U_i \varepsilon_{jlm} f_l U_m = -U_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\delta_{jk} \frac{P}{\rho_0} \right] - U_i g_j \beta \Theta + U_i v \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} U_j \quad (1.41)$$

Nakon sabiranja jednačina (1.40) i (1.41) dobija se

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} U_j U_i + \frac{\partial}{\partial x_k} [U_k U_i U_j + U_i \overline{u_j u_k} + U_j \overline{u_i u_k}] - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \\ & = -U_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\delta_{jk} \frac{P}{\rho_0} \right] - U_i g_j \beta \Theta + U_i v \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_k^2} - U_j \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\delta_{ik} \frac{P}{\rho_0} \right] - g_i \beta \Theta U_j + U_j v \frac{\partial^2 U}{\partial x_k^2} \end{aligned} \quad (1.42)$$

Konačno ako se izvrši *kontrakcija indeksa* (tj. stavimo $i = j$) jer $E_{kin} = 1/2[U_i]^2$, uz konvenciju o sumaciji, dobija se željena jednačina:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial E_{kin}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [U_k E_{kin}] + \frac{\partial}{\partial x_k} [U_i \overline{u_i u_k}] = \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - U_k \frac{\partial P}{\partial x_k} - g_k \beta \Theta U_k + v U_i \Delta U_i \end{aligned} \quad (1.43)$$

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7)

Jednačina za turbulentnu kinetičku energiju može se dobiti, analogno prethodnom postupku, polazeći od jednačina za fluktuacije i ponavljajući postupak kao kod jednačine za kinetičku energiju srednjeg toka. Detaljno izvođenje se može naći u Dodatku **D**. Tamo je takodje transformisan član disipacije tako što se drugi izvod napiše kao zbir dva člana. Da bi se dobio končan oblik koji će ovde biti dat mora da se koristi analiza redova veličina dva novodobijena člana iz koje se vidi da se drugi član može zanemariti. Razmeri ovih članova se dobijaju na osnovu izlaganja u trećoj glavi, no mi ćemo ovde ipak dati konačnu formu jednačine za turbulentnu kinetičku energiju. Ona, uz uobičajenu definiciju veličine $q^2 = \overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}$

ima oblik:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} (q^2/2) &+ \frac{\partial}{\partial x_k} [U_k q^2/2] &+ \frac{\partial}{\partial x_k} [\overline{u_k u_i^2}/2] &= & -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} &- \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_k p} &- \beta g_k \overline{u_k \theta} &- \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \\
 (1) & & (2) & & (4) & (5) & (6) & (7)
 \end{aligned} \tag{1.44}$$

Radi kraćeg pisanja uobičajeno je da se za turbulentnu kinetičku energiju uvede skraćenica **tke**. Smisao članova (6) u prethodnim jednačinama proizilazi iz analize jednačina za srednju potencijalnu energiju i za potencijalnu energiju fluktuacija. Kada uzmemo u obzir vrednosti komponenti vektora g grupa članova označena sa (6) postaju $g\beta\Theta W$ odnosno $g\beta\overline{\theta w}$. Ako sa Z obeležimo srednji položaj delića, a sa z odstupanje od njega, tada je srednja potencijalna energija, jedinične mase u stratifikovanom fluidu, data sa $-g\beta\Theta Z$. Znak $-$ se javlja jer je Θ potencijalna temperatura u odnosu na osnovno referentno stanje, pa ako je Θ pozitivno to znači da je delić fluida topliji/redji od okolnih pa postoji težnja da se podigne do nivoa gde okolni fluid ima njegovu potencijalnu temperaturu. Dakle što je delić dublje, niže u odnosu na srednji položaj delića, to je veća njegova potencijalna energija. Analogno srednja potencijalna energija fluktuacija iznosi $-g\beta\overline{\theta z}$. Vremensku promenu ovih veličina možemo dobiti polazeći od termodinamičke jednačine. Množenjem jednačine (1.37) sa $\beta g Z$ dobija se:

$$\beta g Z \frac{d\Theta}{dt} = -\beta g Z \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_k \theta} + \alpha \beta g Z \Delta \Theta \tag{1.45}$$

odnosno

$$\frac{d}{dt} Pot = \frac{d}{dt} [-\beta g Z \Theta] = -\beta g W \Theta + \dots \tag{1.46}$$

(1) (2)

Za fluktuacije se analogno dobija:

$$\frac{d}{dt} pot = \frac{d}{dt} [-\beta g z \overline{\theta}] = -\beta g \overline{w \theta} + \dots \tag{1.47}$$

(1) (2)

U jednačinama (1.46) i (1.47) sa Pot je označena srednja potencijalna energija a sa pot srednja potencijalna energija fluktuacija ili srednja turbulentna potencijalna energija. Dakle član (6) iz jednačine (1.44) je jednak članu (2) u jednačini (1.47) ali sa suprotnim znakom ($-\beta g_k \overline{u_k \theta} = \beta g \overline{w \theta}$). Na osnovu toga zaključujemo da članovi (2) odnosno (6) opisuju pretvaranje srednje turbulentne potencijalne energije u srednju turbulentnu kinetičku energiju i obrnuto.

Pored određivanja smisla članova odgovornih za razmenu potencijalne energije, analogno, možemo da damo smisao i drugim članovima u jednačinama energetskog bilansa. Poređenjem jednačina (1.43) i (1.44) uočavamo da se članovi označeni sa (4) razlikuju samo u znaku. Opet zaključujemo da je ovaj član odgovoran za pretvaranje kinetičke energije srednjeg toka u **tke** ili obrnuto. Pravac ovog transfera se ne može utvrditi direktnom analizom izraza. Nezavisno, iz laboratorijskih eksperimenata, zatim iz osmatranja u atmosferi odnosno u okeanu, zna se da transfer energije uvek ide od srednjeg toka ka fluktuacijama. To se može zaključiti i sledećom analizom. Profil vetra u blizini tla, u stacionarnom slučaju, je posledica kombinovanog dejstva sile gradijenta pritiska i Koriolisove sile. Zatim znamo da vetar uvek slabi kako se približavamo tlu. Šta bi mogao biti tome razlog? Sila gradijenta pritiska se ne menja sa približavanjem tlu a Koriolisova sila može samo da promeni pravac vetra, te mora da postoji neki drugi mehanizam smanjenja brzine tj. odvođenja količine kretanja. To je upravo turbulentni fluks količine kretanja i on mora biti usmeren ka tlu (tlo prima količinu kretanja od atmosfere). Da bi se to ispunilo $\partial U/\partial z$ mora biti pozitivno.

Što se tiče transfera turbulentne potencijalne energije u kinetičku ili obrnuto on zavisi od znaka fluksa $\overline{w\theta}$. Ukoliko je delić topliji/hladniji on spontano isplivava/tone što u **oba** slučaja daje pozitivan fluks toplote a time se daje pozitivan doprinos povećanju **tke**. Dok ako se spušta topliji delić ili se diže hladniji delić fluks toplote je negativan i imamo pretvaranje **tke** u potencijalnu energiju turbulentnog dela toka. To se dešava u stabilnoj situaciji kada se **tke** stvara isključivo zbog smicanja.

Na taj način smo objasnili dva osnovna izvora **tke**; smicanje osnovne struje i rad sile potiska. Analize osmatranja ili laboratorijskih merenja pokazuju da se u prvoj aproksimaciji ceo energetski bilans može svesti na tri dominantna člana. Već su opisana dva izvora **tke**, a kao treći član se javlja disipacija. U literaturi se ovakvo stanje naziva *ravnotežno* stanje. Dakle

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q^2}{2} \right) \cong \underbrace{-\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_j}{\partial x_i}}_{\substack{\text{prod.zbog} \\ \text{smicanja}}} \quad \underbrace{-\beta \overline{g_k u_k \theta}}_{\substack{\text{prod. zbog} \\ \text{rada sile potiska}}} \quad \underbrace{-\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}}}_{\text{disipacija}} \quad (1.48)$$

ili simbolično

$$\frac{\partial}{\partial t} TKE \approx SPROD + BPROD + \varepsilon \quad (1.49)$$

Empirijske teorije turbulencije

2.1 Uvod

U ovoj glavi ćemo se baviti određivanjem flukseva i profila srednjih veličina unutar turbulentnog graničnog sloja polazeći od empirijskih rezultata koji su dobijeni ili merenjima ili u laboratorijama. Prvo količine kretanja a zatim i ostalih veličina koje su od interesa u meteorologiji. Pri tome će se prvo analizirati prostiji slučaj homogenog fluida i tada će se uglavnom analizirati laboratorijski rezultati. U tom slučaju jedini izvor turbulencije je smicanje srednje struje. Nakon dobijanja nekih rezultata preći će se na stratifikovan fluid kod koga će efekti rada sile potiska kao i prisustva vodene pare biti od velikog značaja pored već pomenutog smicanja srednje struje. Kao osnovni rezultat može se smatrati realizacija kompleksnosti strukture turbulentnih graničnih slojeva. Uvek postoje tri podsloja prema karakteristikama flukseva količine kretanja, toplote itd. Uz samu čvrstu granicu postoji veoma tanak podsloj tzv. *viskozni* podsloj, zatim sledi sloj, približno 10% čitavog graničnog sloja, tzv. sloj *konstantnog* fluksa i ostatak je tzv. sloj *defekta*, kod homogenih fluida ili *izmešani* sloj kod stratifikovanih fluida. Analiza njihovog međusobnog odnosa kao i prelaza iz jednog u drugi dovešće do zaključka da vetar, u blizini tla, u prelaznom sloju od sloja konstantnog fluksa ka izmešanom sloju ima *logaritamsku* zavisnost. To je sigurno jedan od najvažnijih rezultata čitavog kursa.

2.2 Turbulencija u graničnom sloju toka homogenog fluida preko ravne ploče

Kad se pokušava nešto zaključiti na osnovu empirijskih činjenica skoro uvek se polazi od najjednostavnijeg mogućeg slučaja. U pogledu geometrije razmatramo ravnu podlogu, što je slučaj sa najvećim mogućim stepenom simetričnosti. U pogledu termodinamičkom, razmatramo homogen fluid i na kraju u pogledu vremenskih promena razmatraćemo samo slučaj stacionarnog toka. Tako u slučaju toka homogenog fluida to je sigurno tok preko ravne ploče. Tada se mogu učiniti sledeće pretpostavke:

- homogenost u x i y pravcu ($\rho = const.$)
- stacionarnost toka ¹
- konvergencije količine kretanja u x i y pravcu mogu da se zanemare u odnosu na konvergenciju u pravcu z-ose (zašto?).

Uvodjenjem ovih pretpostavki jednačine kretanja se svode na jednu relaciju:

$$W \frac{\partial U}{\partial z} = \left[-\overline{uw} + v \frac{\partial U}{\partial z} \right] - \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2.1)$$

gde je sa P obeležen takozvani kinematički pritisak koji je jednak P/ρ_0 . Sasvim blizu zida, vertikalna komponenta brzine, W , mora da bude sasvim mala tako da se može pisati:

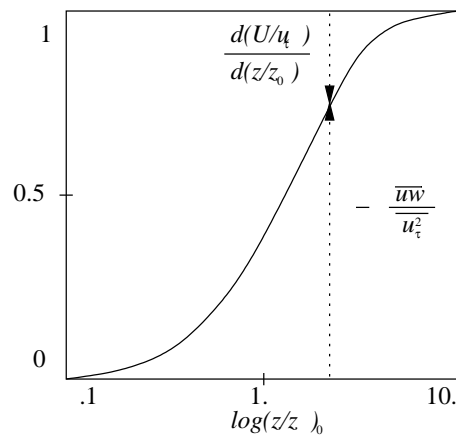
$$\frac{\partial}{\partial z} \left[-\overline{uw} + v \frac{\partial U}{\partial z} \right] = \frac{\partial P}{\partial x} = A \quad (2.2)$$

Dalje, smatraćemo da se vetar odnosno sila gradijenta pritiska ne menja u pravcu x-ose. Tu, konstantnu vrednost sile gradijenta pritiska obeležićemo sa slovom A . Ako sada (2.2) integralimo od tla do visine z dobijamo:

$$-\overline{uw} + v \frac{\partial U}{\partial z} = Az + B = O(z) \quad (2.3)$$

Dakle, u neposrednoj blizini zida, gde je z vrlo malo, ukupan transport količine kretanja je, u prvoj aproksimaciji, konstantan. Vrednost te konstante B je $v \partial_z U|_{z=0}$, a obeležava se sa u_τ^2 ili u_*^2 . Kako je

¹Kod viskoznih fluida moguće je imati stacionarno kretanje i pored dejstva spoljašnjih sila. Upravo turbulentni transport količine kretanja prema podlozi, koji prelazi u viskozni transport uz sam zid, to omogućava.



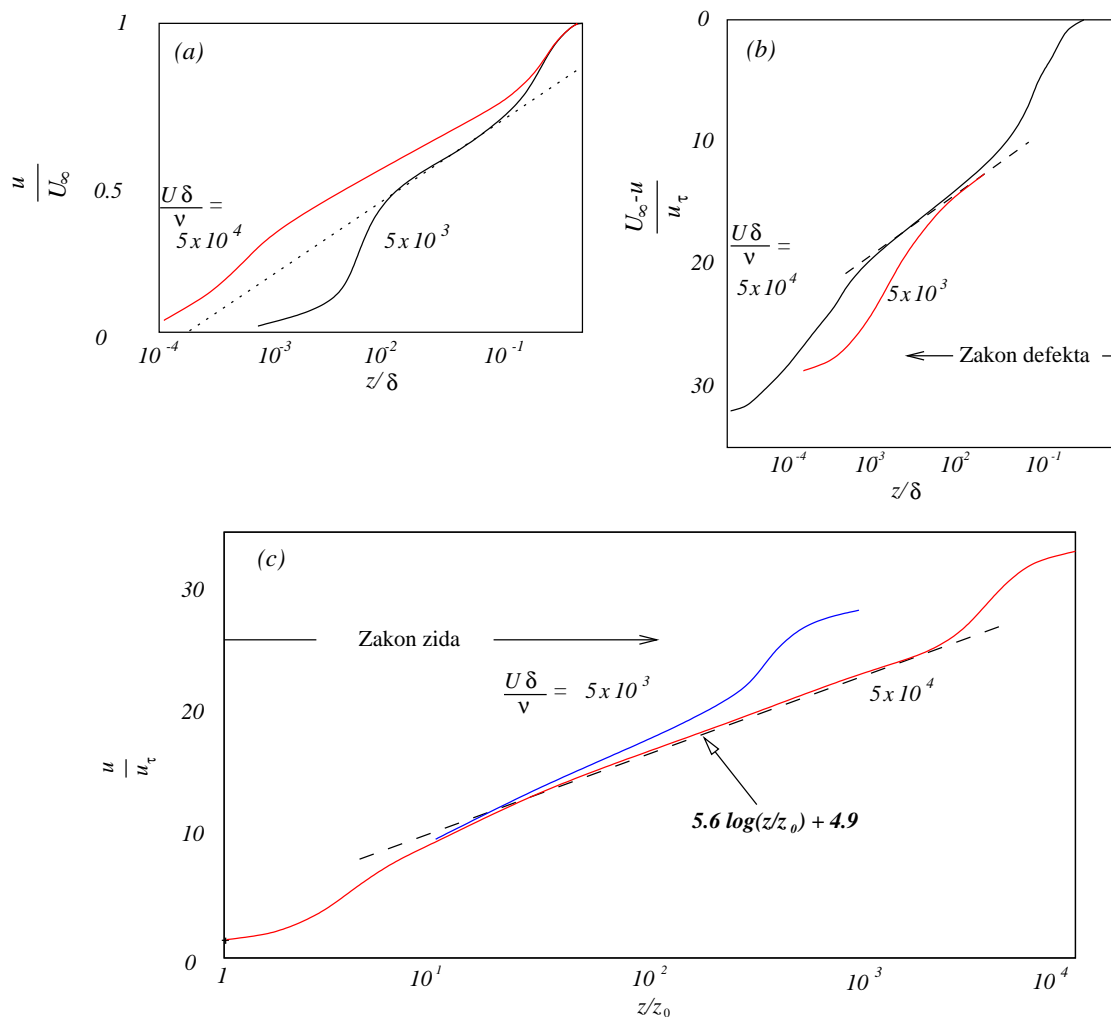
Slika 2.1: Relativan odnos viskoznog i turbulentnog transporta količine kretanja u neposrednoj blizini zida (prema Meloru (15)).

definicija veličine u_τ vezana za viskozno trenje a ima dimenzije brzine zove se "brzina trenja". Sloj u kome je zbir molekulskog i turbulentnog transporta konstantan se zove sloj konstantnog fluksa količine kretanja ili kraće sloj *konstantnog fluksa*. Ako se relacija (2.3) podeli sa u_τ^2 dobije se u bezdimenzionalnom obliku:

$$-\frac{\overline{uw}}{u_\tau^2} + \frac{\partial [U/u_\tau]}{\partial [u_\tau z/\nu]} = 1 + O(z/u_\tau^2) \quad (2.4)$$

Ova relacija je grafički predstavljena na slici (2.1), gde ja na apscisi predstavljen $\log(z/z_0)$ a ordinata prikazuje zbir molekulskog prenosa količine kretanja, meren odozgo na dole, i turbulentnog transporta količine kretanja, meren odozdo na gore. Njihov zbir je tako uvek 1 što fizički znači da se sav transport količine kretanja odvija kao zbir molekulskog i turbulentnog transporta. Eksperimentalno je utvrđeno da za $z < 10\nu/u_\tau$ dominira molekulski transport, dok za $z > 50\nu/u_\tau$ dominira turbulentni transport količine kretanja.

Govoreći jezikom teorije sličnosti određujući parametri u blizini zida su brzina trenja, u_τ i koeficijent viskoznosti ν . Tako se za karakteristični razmer dužine dobija $z_0 = \nu/u_\tau$ koji pri $u_\tau \approx 0.1 \text{ms}^{-1}$ i $\nu =$



Slika 2.2: Profili brzine u neutralnom graničnom sloju pri vrednostima Re broja 5×10^3 i 5×10^4 . Na panelu (a) za razmer brzine je uzeta brzina U_∞ , dok je za razmer dužine uzeta dužina δ . Na sledećem panelu, panel (b), razmer razlike brzine U od U_∞ je u_τ dok je za razmer dužine uzeta vlačina srazmerna sa δ . Treći panel (c) pokazuje slučaj kada se za karakteristične razmere za dužinu i brzinu ima z_0 odnosno brzina trenja, u_τ (prema Meloru i Gibsonu (16)).

$10^{-5} m^2 s^{-1}$, z_0 je reda veličine 0.1 mm. Ovo je samo kada je podloga veoma ravna. U stvarnosti podloga nikada nije idealno ravna, naročito ako je podloga tlo gde neravnine, hrapavost, dominiraju u određivanju vrednosti parametra z_0 . Zato se u tim slučajevima srećemo sa vrednostima za z_0 od 1 cm. pa do nekoliko desetina santimetara.

Polazeći od toga da je određujući parametar (razmer) za brzinu u_τ a za dužinu z_0 , prema Π teoremi² profil vetra u sloju konstantnog fluksa, u neposrednoj blizini zida, mora biti sledećeg oblika:

$$\frac{U}{u_\tau} = f(z/z_0) \quad (2.5)$$

Gornja relacija se naziva *zakon zida*. Moramo naglasiti da oblik funkcije f ostaje nepoznat.

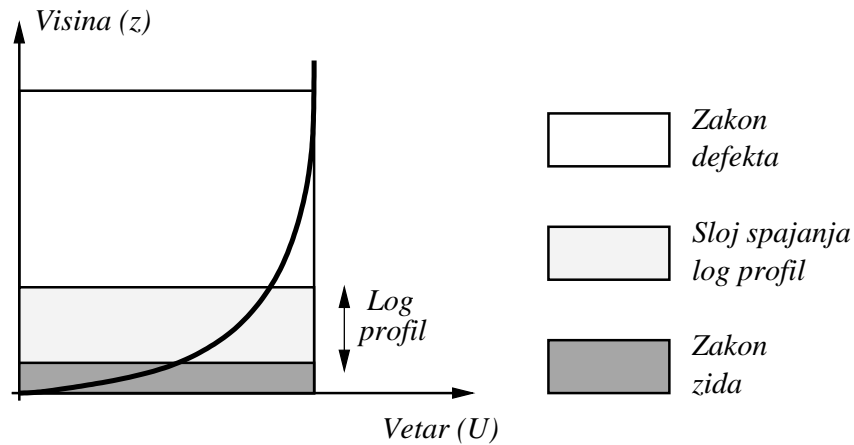
Kako stoji stvar sa profilom vetra iznad sloja konstantnog fluksa? Ovde je situacija komplikovanija jer ne znamo kako da, apriori, izaberemo dužinski odnosno razmer brzine. Za oba razmera ima više kandidata. U slučaju dužinskog razmera, pored već formiranog razmera z_0 , kao drugi kandidat se pojavljuje i visina čitavog graničnog sloja, δ . U slučaju razmera brzine možemo očekivati brzinu trenja ali i recimo brzinu fluida iznad graničnog sloja uslovno označen sa U_∞ . Analizirajući rezultate iz laboratorijskih eksperimenata, za sloj iznad sloja konstantnog fluksa, zaključujemo da zakon sličnosti ima oblik:

$$\frac{U - U_\infty}{u_\tau} = F(z/\delta) \quad (2.6)$$

Kako prethodna relacija govori o razlici, defektu brzine, U , od brzine izvan graničnog sloja, U_∞ , relacija (2.6) se naziva *zakon defekta*. Potvrda za to je sledeća slika koja je preuzeta iz rada Melora i Gibsona (1966). Na toj slici (2.2) su dati profili brzine u neutralnom graničnom sloju pri vrednostima Rejnoldsovog broja 5×10^3 i 5×10^4 . Na panelu (a) za razmer brzine je uzeta brzina U_∞ , dok je za razmer dužine uzet δ . Vidimo da do slaganja dolazi tek pri samom vrhu graničnog sloja, što dalje znači da ili razmere brzine ili razmere dužine nisu dobro izabrane. Na sledećem panelu, panel (b), prikazana je razlika brzine U od U_∞ podeljena sa u_τ dok je rastojanje od podloge podeljeno sa δ (preciznije rečeno na ovoj slici je razmer dužine veličina koja je srazmerna sa δ , ali u ovakvim razmatranjima je to nebitno). Pošto je na apscisi logaritamska podela to vidimo da se u velikom delu graničnog sloja (preko 90 %) oba profila potpuno poklapaju i da je u pitanju logaritamska zavisnost (približno linearna veza veličina sa grafika). Rasturanje počinje tek kada je bezdimenziono rastojanje od podloge manje od 10^{-2} . Treći panel (c) pokazuje slaganje za veoma mala rastojanja od zida a karakteristične razmere za dužinu i brzinu su z_0 odnosno brzina trenja, u_τ . Takodje se lepo vidi da postoji relativno širok interval u kome važi logaritamski zakon. Ova logaritamska zavisnost se može i formalno izvesti što ćemo ubrzo i pokazati.

²za sadržaj Π teoreme vidi dodatak H

Sumarno, profil vetra sa visinom, možemo shematski prikazati kao na slici (2.3). Dakle iznad sloja



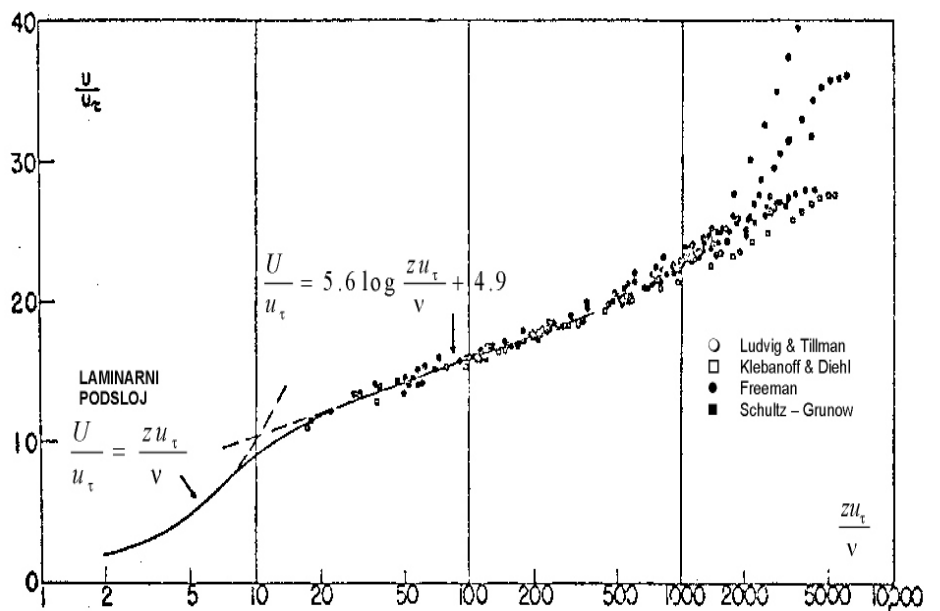
Slika 2.3: Shematski raspored podslojeva kod graničnog turbulentnog sloja u slučaju homogenog fluida (debljina viskozno pod sloja je jako uveličana).

konstantnog fluksa važi zakon defekta, a u sloju konstantnog fluksa zakon zida. U međuprostoru, gde jedan sloj prelazi u drugi sloj, postuliramo postojanje kontinuiranog prelaza jednog zakona u drugi. Kako formulisati (opisati) taj prelaz? Sa strane sloja konstantnog fluksa prelaz se događa kako odnos z/z_0 postaje veoma veliki. Sa druge strane, idući iz sloja gde važi zakon defekta u sloj konstantnog fluksa, z/δ postaje veoma mali. Međutim, dodatna pretpostavka o neprekidnosti prvog izvoda će dovesti do rezultata.

$$\left(\frac{dU}{dz}\right)_{unut.} = \frac{u_\tau^2}{\nu} f'(z/z_0) = \left(\frac{dU}{dz}\right)_{spolj.} = \frac{u_\tau}{\delta} F'(z/\delta) \quad (2.7)$$

Kako desna strana gornje jednačine ne zavisi od parametra viskoznosti ν to ni leva strana ne sme da zavisi od njega. Parametar viskoznosti je prisutan preko z_0 . To je jedino moguće ako je f' stepena funkcija argumenta z/z_0 , tj. oblika:

$$f'\left(\frac{z}{z_0}\right) = \left(\frac{z}{z_0}\right)^s \quad (2.8)$$



Slika 2.4: Izmereni profil brzine u blizini glatkog zida predstavljeni preko razmera brzine odnosno dužine, karakteristične za režim za koji važi zakon zida (prema Meloru (15)).

jer za $s = -1$, koeficijent viskoznosti, ν , se ne pojavljuje u krajnjem izrazu. Dakle:

$$\frac{dU}{dz} = \text{const} \frac{u_\tau}{z} \equiv \frac{u_\tau}{\kappa z} \quad (2.9)$$

gde je κ tzv. konstanta Von Karmana. Njena vrednost nije tačno određena a u literaturi se sreću vrednost od 0.35 do 0.42. Ipak se najčešće sreće vrednost 0.4. Konačno, na osnovu rezultata mnogobrojnih eksperimenata čiji su rezultati prikazani na slici (2.4), za profil brzine se dobija:

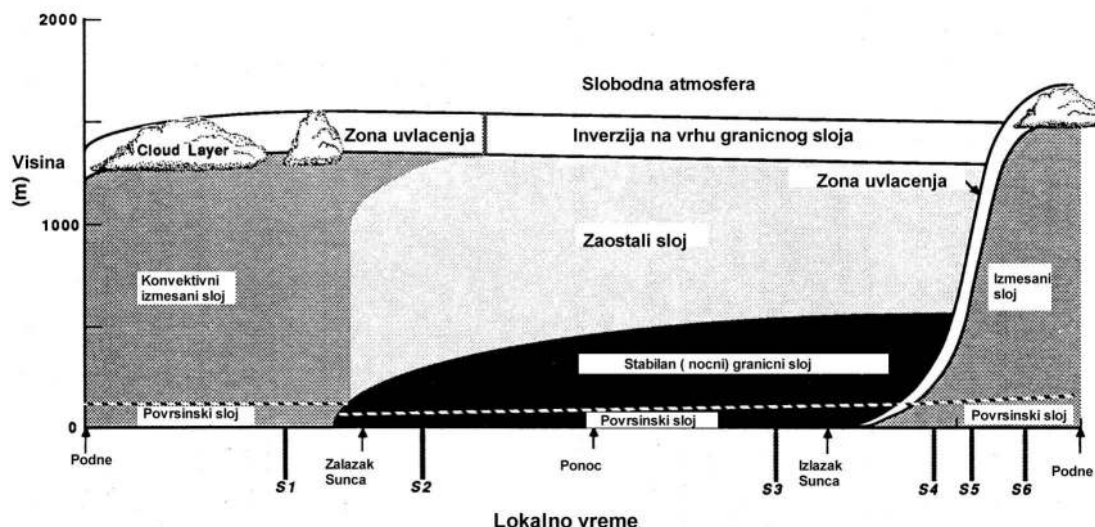
$$\frac{U(z)}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \log \frac{z}{z_0} + 4.9 \quad (2.10)$$

Inače u matematičkoj teoriji graničnih slojeva ovakva procedura, a u kojoj se traži preklapanje (slaganje) na konačnom intervalu, se naziva asimptotsko sklapanje (za detaljniji prikaz ove problematike vidi dodatak "Elementi teorije graničnog sloja" ili referencu Bender i Orzag (1)). Kada naprotiv zahtevamo jednakost funkcija u jednoj tački govorimo o asimptotskom spajanju (u bukvalnom prevodu termina iz anglo-saksonske literature govorimo o krpljenju). U dodatku A dati su osnovni elementi matematičke teorije graničnog sloja, za linearan slučaj.

2.3 Stratifikovani fluidi

U dosadašnjim razmatranjima bilo je reči o graničnim slojevima u homogenim fluidima gde je postojanje gradijenta brzine osnovne struje jedini moguć izvor turbulencije. Sada će se razmatrati turbulentni tokovi pri postojanju nehomogenosti u poljima temperature odnosno gustine. Svakako, za kretanja u graničnom sloju atmosfere dominantne su pojave vezane za nehomogenosti u poljima termodinamičkih veličina. To je najizraženije kroz dnevni hod temperature ali i ostalih veličina. Na slici (2.5) dat je shematski prikaz promena planetarnog graničnog sloja u toku dana.

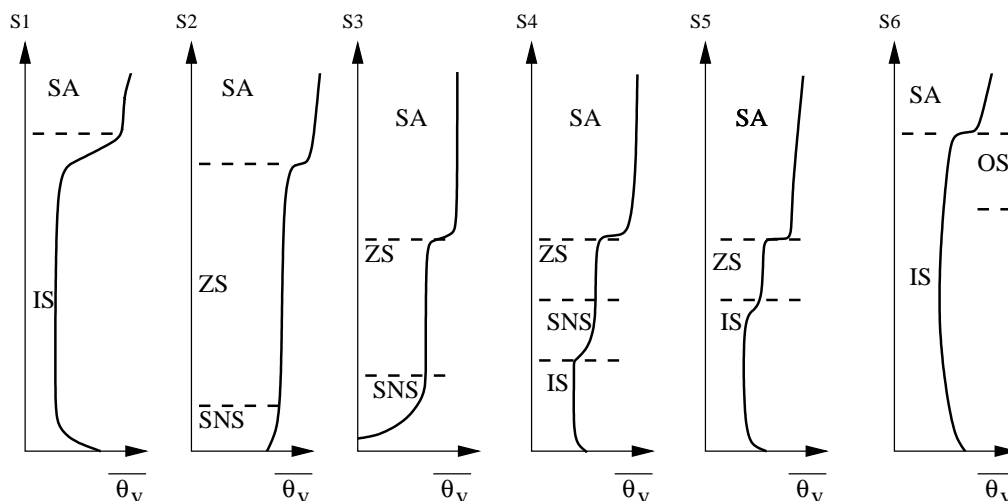
Osnovni razlog postojanja stratifikacije u atmosferi je mehanizam njenog zagrevanja. Apsorpcijom Sunčevog kratkotalnog zračenja dolazi do zagrevanja tla. Toplota se zatim prenosi uvis dvojako. Kao prvi mehanizam zagrevanja možemo označiti apsorpciju i re-emisiju infracrvenog zračenja čiji je izvor tlo. Toplotno zračenje se zatim postepeno prenosi do najviših slojeva atmosfere. Kao drugi mehanizam imamo provodjenje. Provodjenje počinje pri samom tlu i tu je najizrazitiji mehanizam prenosa toplote ali i drugih pasivnih veličina. Ovaj transport je dominantan u vrlo tanakom sloju tzv. molekularnom podsloju koji se opisuje preko kinetička teorija gasova. U tom sloju srednji slobodni put je karakteristični razmer dužine. Nastavak procesa prenosa toplote i vlage iznad molekularnog podsloja je sasvim drugačiji po svojoj prirodi. Tu se formiraju uredjena, mikro-kretanja mnogo manjih razmera u odnosu na razmere kretanja daleko od tla. Prenos, advkcija od strane tih mikr-struja je dominantan mehanizam transporta toplote, količine kretanja, vlage itd. u najvećem delu atmosfere pri tlu. Samim tim i u određivanju vertikalnih profila tih i veličina. Taj deo atmosfere nazivamo turbulentni granični sloj ili planetarni granični sloj, skraćeno **PGS**. Iznad planetarnog graničnog sloja konvektivna kretanja velikih razmera (velikih u odnosu na konvektivna kretanja unutar PGS-a) kao i kretanja mezo, sinoptičkih i planetarnih razmera određuju profile brzine i termodinamičkih veličina. Sem što predstavlja izvor/ponor toplote, količine kretanja, vlage,..., važna karakteristika planetarnog graničnog sloja je da se u njemu odvija velika disipacija kinetičke energije atmosfere. Drugi takav pojas velike disipacije kinetičke energije je sloj oko tropopauze u mlaznoj struji u kojoj se generiše turbulencija, ovoga puta samo kao posledica



Slika 2.5: Shematski prikaz PGS-a u polju visokog pritiska, iznad kopna. PGS se sastoji od tri glavna dela: jako turbulentnog izmešanog podsloja; manjeg turbulentnog, zaostalog podsloja gde je u prethodnom periodu bio izmešani podsloj; i noćnog stabilnog podsloja u kome imamo sporadičnu pojavu turbulencije. S1-S6 su vremenski markeri trenutaka za koje će biti dati profili na slici (2.8), (prema Stulu (24)).

smicanja.

Analizu dnevnog hoda PGS-a počnimo od podneva, tipičnog letnjeg dana, sa dobro razvijenim konvektivno izmešanim slojem na čijem se vrhu nalazi zona koja se naziva zona uvlačenja. Na slici (2.5) sa S1 je označen ovaj trenutak za koji je na sledećoj slici (2.6), prikazan profil virtuelne potencijalne temperature, vetra, relativne vlage i tipičan profil neke pasivne supstance. Nakon zalaska Sunca, do narednog izlaska, u najvećem delu predjašnjeg izmešanog sloja turbulencija se postepeno disipira. Struktura je takva da na vrhu postoji sloj inverzije, zatim nadole "zaostali" sloj, zatim stabilni sloj (noćni) i pri tlu površinski sloj. Iz tog dela dana prikazani su profili S2 i S3. Nakon izlaska Sunca, usled intenzivnog zagrevanja tla ponovo se razvija izmešani sloj na čijem se dnu nalazi površinski sloj. Profili iz ovog dela

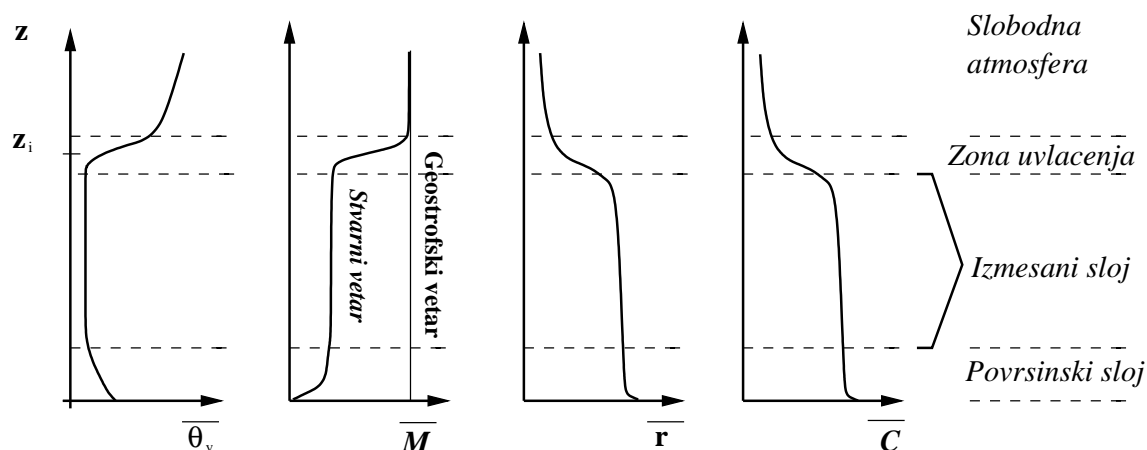


Slika 2.6: Tipični, dnevni profili srednje virtualne potencijalne temperature ($\overline{\theta}_v$), intenziteta vetra (M), vodene pare, izražene kao specifična vlaga (r) i nekog pasivnog polutanta, (prema Stulu (24)).

dana su naznačeni kao S4, S5 i S6 na slici (2.6). U toku noći se formira stabilna stratifikacija i profili temperature i vetra mogu se shematski prikazati kao na slici (2.7).

Jedna od najmarkantnijih karakteristika PGS-a je njegova gornja granica. Najčešće se na vrhu planetarnog graničnog sloja (sl. 2.6) opaža zona karakteristična po postojanju jakih gradijenata u skoro svim veličinama. Kako se tu opaža i intenzivnije spuštanje, uvlačenje, odatle i naziv zona uvlačenja. Ti gradijenti temperature i vlage bivaju naročito jako izraženi ako se na vrhu planetarnog graničnog sloja formira stratusni oblak a što je inače česta pojava, naročito iznad morskih površina u subtropskim širinama. Fizički procesi pri formiranju ovih oblaka su još kompleksniji od procesa u suvom PGS-u jer tada se pojavljuju dodatni efekti. Prvi i najznačajniji je oslobađanje latentne toplote. Drugi, značajan proces je interakcija oblaka sa zračenjem i to kako u kratkotalasnom tako i u dugotalasnom delu spektra.

Na kraju, važno je naglasiti da se karakteristične prostorne i vremenske razmere i razvijenost pojedinih podslojeva PGS-a menjaju u zavisnosti od doba dana, sezone i godišnjeg doba a naročito je važno da li je podloga kopno ili more. Zatim lokalne karakteristike mogu da veoma mnogo utiču na karakteris-

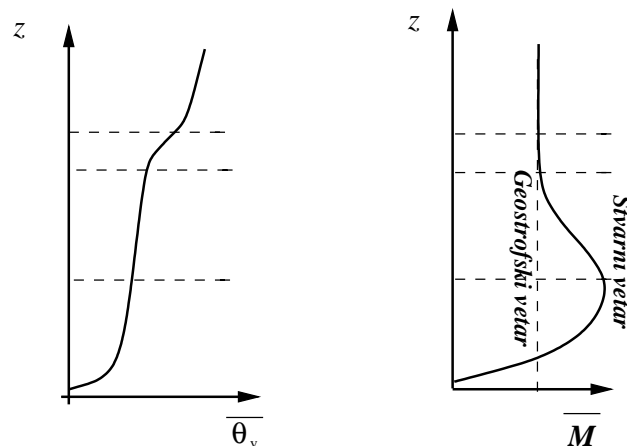


Slika 2.7: Profili srednje virtualne potencijalne temperature $\overline{\theta}_v$, levo i intenziteta vetra M , desno, za idealizovan stabilan granični sloj u polju visokog pritiska. Vertikalna isprekidana linija, desno, označava odgovarajući geostrofski vetar; (prema Stulu (24)).

tike i evoluciju PGS-a, sastav podloge, prisustvo topografije, urbana sredina i slično.

2.4 Teorija sličnosti Monin-Obuhov

U slučaju homogenih fluida, za deo graničnog sloja u blizini zida, tamo gde je vertikalni fluks količine kretanja približno konstantan, važi logaritamski zakon promene brzine sa visinom, odnosno gradijent brzine je obrnuto srazmeran rastojanju od zida. Naravno, u meteorologiji je od mnogo većeg interesa koliki su fluksevi količine kretanja i toplote u slučaju nehomogenog fluida tj. pri postojanju stratifikacije. Za stratifikovane fluide, za deo graničnog sloja u blizini podloge, pedesetih godina, Monin i Obuhov su predložili kako da se računaju svi fluksevi uopštenjem rezultata koji važe kod homogenog fluida. Osnovna ideja je bila da se podje od relacija za homogen fluid pa se izraz za gradijent brzine pomnoži univerzalnom funkcijom odnosa dužine i karakterističnog dužinskog razmera kog određuju parametri koji karakterišu procese prisutne kod stratifikovanog fluida. U slučaju određivanja gradijenata tempera-



Slika 2.8: Profili srednje virtualne potencijalne temperature koji pokazuju dnevnu evoluciju PGS-a polazeći od 16 h lokalnog vremena. S1 – S6 označavaju trenutke za koje važe profili a u skladu sa slikom 2.5 (prema Stulu (24)).

ture ili neke druge pasivne supstance, za koje ne postoje analogoni u slučaju homogenog fluida, zadržava se ista ideja. Time bi se problem računanja flukseva ili ekvivalentno računajna vertikalnih profila sveo na uredjivanje tih novouvedenih univerzalnih funkcija. Centralna tačka je bila pretpostavka da je dužinski razmer jedinstven za sve veličine. Gradijent brzine kod homogenog fluida ćemo napisati na malo opštiji način koji će nam omogućiti generalizaciju na profil brzine, potencijalne temperature neke pasivne supstance i uopšte profil nečega što ima izvor pri tlu. To je prikazano sledećom tabelom:

HOMOGEN FLUID

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{M_{x\tau}}{\kappa z}$$

STRATIFIKOVAN FLUID

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{M_{x\tau}}{\kappa z} \Phi_m(\zeta) \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} = -\frac{\Theta_\tau}{\kappa z} \Phi_h(\zeta) \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = -\frac{Q_\tau}{\kappa z} \Phi_q(\zeta) \quad (2.13)$$

gde su uvedene oznake L za vertikalni dužinski razmer,

$$\zeta = z/L \quad (2.14)$$

Veličine:

$$M_{x\tau} = \overline{wu}_0/u_\tau, \quad \Theta_\tau = \overline{w\theta}_0/u_\tau, \quad Q_\tau = \overline{wq}_0/u_\tau$$

su karakteristične razmere za x-komponentu brzine, potencijalnu temperaturu i vlažnost. Uopšte, karakteristične razmere neke veličine jesu odnos vertikalnog fluksa te veličine i brzine trenja,

$$S_\tau = \overline{ws}_0/u_\tau.$$

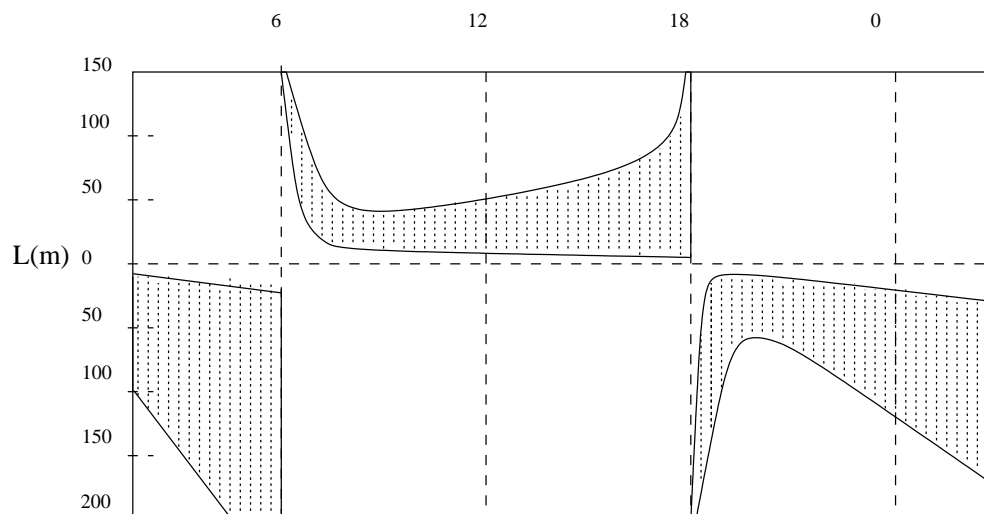
Kako je ranije rečeno osnovni problem teorije je pronalaženje veličina koje određuju vertikalni dužinski razmer. Monin i Obuhov su predložili da određujući parametri budu reprezentanti osnovnih procesa u stratifikovanoj atmosferi koji utiču na nivo *tke*:

- brzina trenja, u_τ , kao parametar koji predstavlja smicanje kao jedan mehanizam generisanja turbulencije, kao i kod homogenog slučaja,
- $\overline{w\theta}_0$ je veličina koja predstavlja drugi deo ovog mehanizma proizvodnje turbulencije, preko rada sile potiska, kao izvora/ponora *tke*,
- βg parametar rada sile potiska koji karakteriše stanje stratifikacije.

Uvedena je oznaka $\beta = 1/\Theta_0$, gde je Θ_0 , karakteristična vrednost za potencijalnu temperaturu u atmosferi, konstanta za čiju vrednost se najčešće uzima 300° K, mada neki autori za njenu vrednost uzimaju i 273° K. Dimenziona analiza predloženih veličina daje sledeći dužinski razmer:

$$L = \frac{u_\tau^3}{\kappa \beta g \cdot \overline{w\theta}_0} \quad (2.15)$$

Veličina κ je već ranije uvedena konstanta Von-Karmana. Napominjemo da se često u literaturi sreće i definicija koja se razlikuje od ove po znaku. Ponekad ćemo i mi koristiti definiciju L -a sa promenjenim znakom ali uz jasnu naznaku u tekstu. Prema svojoj definiciji, dužina Monin-Obuhova je algebarska veličina čiji znak određuje znak fluksa toplote od podloge ka atmosferi. Tako, kada je podloga toplija



Slika 2.9: Tipičan opseg vrednosti M-O dužine u toku dana (ovde je definicija L -a uzeta sa suprotnim znakom od definicije u tekstu). Apscisa označava sate u danu, (prema Stulu (24)).

od najnižih slojeva atmosfere tj. kada rad sile potiska generiše **tk**e, L je pozitivno. Ukoliko je podloga hladnija od vazduha iznad nje, fluks toplote je negativan, pa je samim tim i L negativno. Na slici (2.9) su skicirane vrednosti za dužinu Monin-Obuhov uzimajući da se brzina trenja i fluks toplote kreću u opsezima karakterističnim za atmosferu (napominjemo da je slika data za definiciju L -a sa suprotnim znakom). Direktnom integracijom jednačina (2.11), (2.12) i (2.13) i uz definicije za količinu kretanja

$$\Psi_m(\zeta) = \int_{z_{0m}}^{\zeta} \frac{\Phi_m(\zeta) - 1}{\zeta} d\zeta \quad (2.16)$$

za toplotu, i ostale pasivne substance

$$\Psi_t(\zeta) = \int_{z_{0t}}^{\zeta} \frac{\Phi_t(\zeta) - 1}{\zeta} d\zeta, \quad (2.17)$$

za profil brzine dobijamo:

$$U(z) - U(z_{0m}) = -\frac{1}{\kappa} \frac{\overline{wu_0}}{u_\tau} [\log(z/z_{0m}) - \Psi_m(z/L)], \quad (2.18)$$

za profil potencijalne temperature dobijamo:

$$\Theta(z) - \Theta(z_0) = -\frac{P_{rt}}{\kappa} \frac{\overline{w\theta_0}}{u_\tau} [\log(z/z_{0t}) - \Psi_t(z/L)], \quad (2.19)$$

i konačno za profil vlažnosti dobijamo:

$$Q(z) - Q(z_0) = -\frac{P_{rt}}{\kappa} \frac{\overline{wq_0}}{u_\tau} [\log(z/z_{0q}) - \Psi_q(z/L)]. \quad (2.20)$$

Veličine $z_{0m}, z_{0t}, z_{0q}, \dots$ su "visine" trenja za odgovarajuće procese i moraju se poznavati pre nego što se krene u izračunavanja flukseva. Kao i kod toka fluida preko ravne ploče, gde smo imali samo jedan parametar z_0 , postojanje i brojne vrednosti parametara $z_{0m}, z_{0t}, z_{0q}, \dots$ su posledica činjenice da veoma blizu granica uticaji molekulskih transporta postaju značajni. Njihovo izračunavanje je moguće putem "spajanja" površinskog (unutrašnjeg) i spoljašnjeg sloja PGS-a. Za detalje ovog postupka pogledati kod Janjića (9). Kada izračunamo ili naprosto usvojimo vrednosti za "visine" trenja možemo da koristimo metodologiju izračunavanja flukseva toplote i količine kretanja pomoću Monin-Obuhov teorije. Za detalje dobijanja analitičke forme funkcija $\Psi_m, \Psi_h \dots$ i razlike u računu kod stabilne i nestabilne stratifikacije videti Dodatak B.

Kada razmena toplote između atmosfere i podloge teži nuli tada i vrednost odnosa $\zeta = z/L$ teži nuli. Ako je pre tog trenutka stratifikacija bila nestabilna ona se sada približava neutralnoj stratifikaciji. Na osnovu definicija funkcija $\Phi_m, \Phi_h, \Phi_q \dots$ sledi :

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0^+} \Phi_m, \Phi_h, \Phi_q = 1 \quad (2.21)$$

Za male vrednosti ζ , možemo funkcije Φ_m, Φ_h, Φ_q razviti u stepeni red i ako se zadržimo na prvom članu možemo da pišemo:

$$\Phi_m, \Phi_h, \Phi_q \approx 1 + \alpha\zeta \quad (2.22)$$

što nakon integracije daje :

$$\frac{U(z)}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \left[\log(z/z_0) + \alpha \frac{z - z_0}{L} \right] \quad (2.23)$$

Dakle, u slučaju kada je i stratifikacija stabilna ali bliska neutralnoj, prema teoriji Monina i Obuhova, profil vetra je *logaritamsko linearan*. Uspešnost predviđanja promene vetra sa visinom, relacija (2.23), i uopšte provera uspešnosti hipoteze Monina i Obuhova o postojanju jedne univerzalne prostorne razmere je uradjena analizom rezultata dobijenih iz čuvenog Kanzaskog eksperimenta. Eksperiment je upravo i bio izveden sa ciljem da se dobiju detaljnije informacije o profilima srednjih veličina odnosno vetrikalnim fluksevima tih veličina unutar površinskog dela PGS-a. Kansas je izabran kao deo Sjedinjenih Američkih Država koji se karakteriše velikim amplitudama temperature kako u toku dana tako i u toku godine. Leti imamo veoma nestabilnu stratifikaciju sa izrazitim konvektivnim režimom, dok je zimi prisutna jaka inverzija odnosno veoma stabilna stratifikacija. Eksperiment je bio veoma skup jer su veoma velike površine bile pokrivene mernim uredjajima, pošto se želelo da se što bolje uoče a zatim izračunaju doprinosi od horizontalne advekcije lokalnim promenama. Ovaj eksperiment je bio veliki dokaz uspešnosti ideja teorije Monina i Obuhove. Rezultati se mogu prikazati na dijagramu koji za ose ima izračunate vrednosti univerzalnih funkcija (ordinata), dok je na apscisi ζ , odnos visine i dužine Monin-Obuhova. Kako to izgleda možemo videti sa slike (2.10). Tačke označavaju izmerene vrednosti i jasno se vidi da su se one grupisale, tj. da nisu nasumice rasute na dijagramu. Punim linijama su označene krive koje aproksimiraju izmerene vrednosti i deo po deo imaju sledeće analitičke oblike za funkcije Φ_m i Φ_h za nestabilnu stratifikaciju, za količinu kretanja i toplote

$$\Phi_m = (1 + 15\zeta)^{-\frac{1}{4}} \quad (2.24)$$

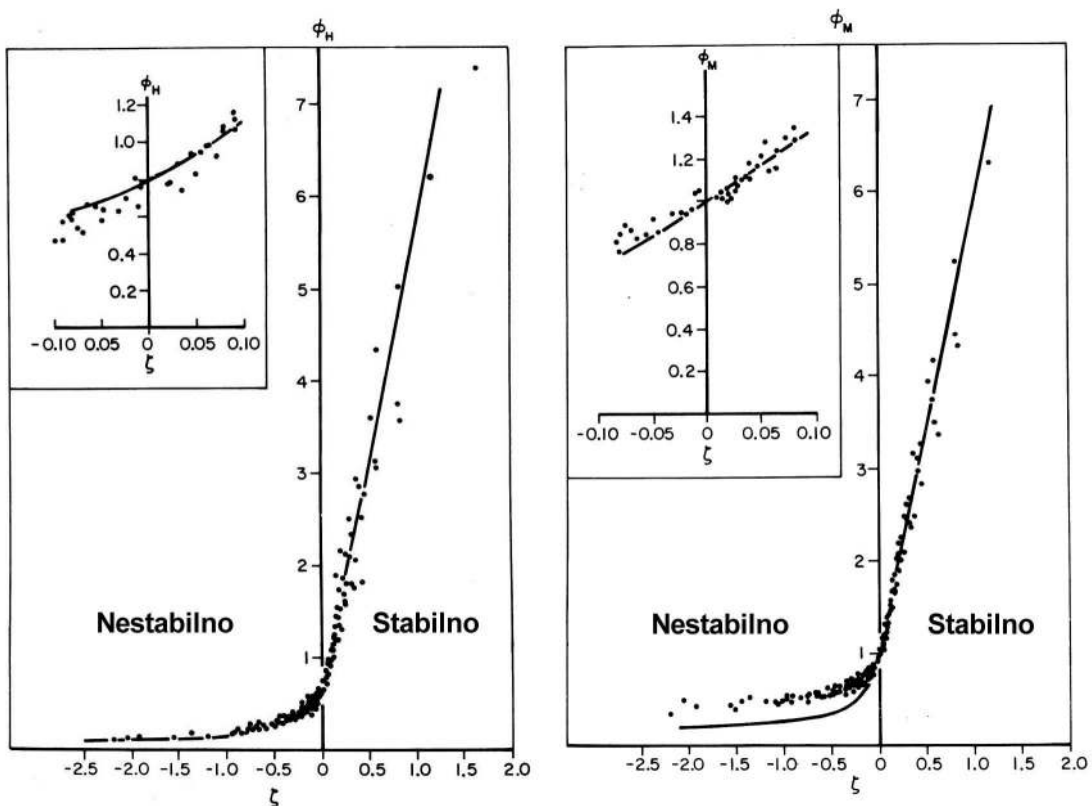
$$\Phi_h = .74(1 + 9\zeta)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.25)$$

za stabilnu stratifikaciju, za količinu kretanja i toplote:

$$\Phi_m = 1 + 4.7\zeta \quad (2.26)$$

$$\Phi_h = .74(1 + 4.7\zeta) \quad (2.27)$$

Kako je vrednost eksponenata, u slučaju nestabilne stratifikacije, određena procenom slaganja merenja i predložene krive, u literaturi, pored ovih eksponenata koji su predloženi u radu Paulsona (22) i Busingera i dr. (7) sreću se i neki drugi. Tako je Melor (14) predložio da se za slučaj nestabilne stratifikacije i kod fluksa momenta količine kretanja i kod fluksa toplote uzima da je vrednost eksponenta $-1/3$ a koeficijenti 15 i 9 zamene sa 11.5 i 16.5 respektivno (videti dodatak **B**).

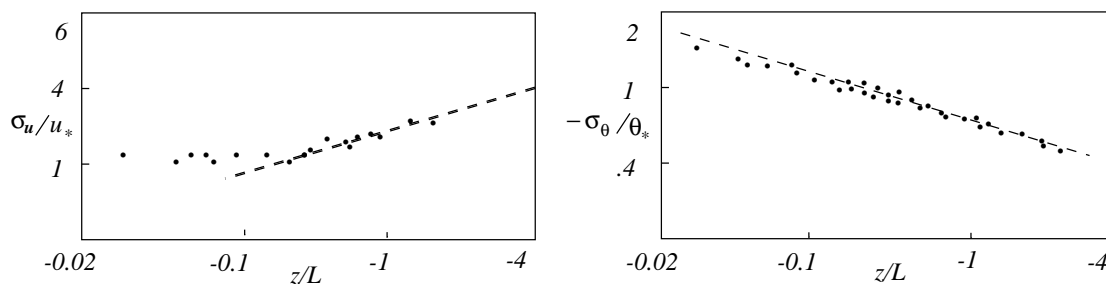


Slika 2.10: Osmotrene, bezdimenzionalne vrednosti: gradijenta vetra (levo) prikazanog preko funkcije Φ_M i gradijenta temperature (desno) prikazanog preko funkcije Φ_H , iz Kansas eksperimenta (tačkice). Pune linije, unutar oblasti sa izmerenim vrednostima, su iste dobijene iz modela Melora (14). Važno je napomenuti da je u prikazu ovih rezultata L definisano sa suprotnim znakom od onog u tekstu (prema Businger i dr. (7))

Pored opšteg slučaja kada imamo opis gradijenata ili flukseva veličina koje analiziramo, preko funkcija Φ_m i Φ_h odnosno Ψ_m i Ψ_h , moguće je dobiti za neke specijalne slučajeve eksplicitne relacije u obliku stepenih zakona. Da bi se to desilo mora se suziti broj dimenziono nezavisnih parametara u odnosu na opšti slučaj za koji važi Monin-Obuhov analiza. U odnosu na moguće stratifikacije razlikujemo dva ekstrema. Prvi je stratifikacija kod koje se uočavaju nadadijabatski gradijenti temperature, tzv. lokalna slobodna konvekcija. Drugi slučaj je kada se formira jako stabilna stratifikacija.

2.4.1 Lokalna slobodna konvekcija

Analizirajmo prvo slučaj kada je $\zeta \gg 1$. To će se ispuniti, pri fiksiranoj vrednosti z -a, kada je vrednost L -a mala. Da bi se to dogodilo mora da postoji intenzivan prenos toplote od podloge u atmosferu ($\overline{w\theta_0}$ jako veliko). To je karakteristično za vedar letnji dan u podnevnim i ranim popodnevnim časovima a pri umerenim vetrovima. Ovaj režim nazivamo *lokalna slobodna konvekcija*. Konvekcija jer se tada opažaju nadadijabatski gradijenti. Kako se pojava opaža najpre pri vrhu površinskog sloja, dakle lokalizovano, otud drugi deo naziva. S obzirom na lokalizovanost pojave, oko vrha površinskog sloja, relativno daleko od tla, možda u_τ više nije određujući parametar? Dakle sve veličine se predstavljaju preko skupa z , βg i $\overline{w\theta_0}$. Kao ilustraciju uspešnosti izbora određujućih parametara, nadjimo izraze za varijanse vertikalne brzine i potencijalne temperature. U slučaju varijanse vertikalne brzine dimezionalna homogenost daje:



Slika 2.11: Normalizovana varijansa vertikalne brzine $\frac{\sqrt{w^2}}{u_\tau}$ (a) i potencijalne temperature $\sqrt{\theta^2}/\Theta_\tau$ (b). Isprekidana linija predstavlja predviđanje na osnovu teorije o lokalnoj slobodnoj konvekciji a tačke predstavljaju osmatranja.

$$\overline{w^2} = const \cdot z^a (\beta g)^b (\overline{w\theta_0})^c \quad (2.28)$$

Pošto su dimenzije $\overline{w^2}$ oblika L^2T^{-2} , dimenziona homogenost daje $a = b = c = 2/3$. Dakle:

$$\overline{w^2} = const \cdot (z\beta g (\overline{w\theta_0}))^{2/3} \quad (2.29)$$

Analogno, u slučaju varijanse potencijalne temperature, se dobija:

$$\overline{\theta^2} = const \cdot \left(\frac{(\overline{w\theta_0})^2}{z\beta g} \right)^{2/3} \quad (2.30)$$

Radi poredjenja sa opštim slučajem napišimo dobijene izraze tako da se pojavi dužina L :

$$\frac{\overline{w^2}}{u_\tau^2} = const \cdot \left(\frac{z}{L} \right)^{2/3} \quad (2.31)$$

$$\frac{\overline{\theta^2}}{\Theta_\tau^2} = const \cdot \left(\frac{z}{L} \right)^{-2/3} \quad (2.32)$$

U neutralnom slučaju fluksevi količine kretanja su isti za sve komponente; $\overline{w^2}/u_\tau^2 = const.$ i $\overline{wv}/u_\tau^2 = const.$ jer je brzina trenja jedina raspoloživa veličina sa razmerom brzine. U slučaju lokalne slobodne konvekcije dobijeno je da varijansa vertikalne brzine raste sa visinom. Ovo povećanje brzine porasta sa visinom, u poredjenju sa neutralnim slučajem, je posledica porasta intenziteta mešanja sa porastom visine. Uporedimo sada $\overline{\theta^2}$ sa rezultatom u neutralnom slučaju. Ona se smanjuje sa visinom, u odnosu na neutralan slučaj, što je opet posledica veoma intenzivnog mešanja koje pokušava da smanji nadadijabatski temperaturni gradijent, prisutan u slučaju lokalne slobodne konvekcije. Da li su ovakvi rezultati ispravni? Provera je jedino moguća preko poredjenja sa merenjima. Zaista na slici (2.11), koja je deo rezultata iz Kansas eksperimenta, vidimo prvo da sa porastom odnosa z/L slaganje predviđanja na osnovu lokalne slobodne konvekcije i eksperimenta postaje sve bolje u smislu da se merene vrednosti grupišu oko prave linije. Drugo, grupisanje oko prave linije, a kada se ima logaritamska podela na apscisi ukazuje na stepeni zakon, pri čemu nagib te linije određuje vrednost stepena. Napominjemo da je na slici prikazan odnos $\sqrt{\overline{w^2}}/u_\tau$ čiji nagib iznosi oko $-1/3$ što za kvadrat odnosa daje $-2/3$ kako smo i dobili. Analogno u slučaju varijanse potencijalne temperature očitavamo da je iznos nagiba oko $-1/3$. Dakle, u

oba slučaja predviđanja i merenja se relativno dobro slažu. No, treba napomenuti da nisu sva predviđanja ovako uspešna. Tako na primer $\Phi_h \equiv kz\beta\partial\Theta/\partial z$, prema izboru određujućih parametara za lokalnu slobodnu konvekciju, treba da se menja kao $(z/L)^{-1/3}$ dok merenja ukazuju na stepen $(z/L)^{-1/2}$. Na kraju napomenimo da se u novije vreme sve veći značaj pridaje činjenici da se turbulentno kretanje čak i u najnižim slojevima atmosfere, blizu tla, karakteriše postojanjem malih (lokalnih) strujica čak i pri potpunom odsustvu smicanja srednje struje. Dakle i u tom slučaju polje turbulencije nije potpuno haotično što je bila slika na koju se "naslanja" Monin-Obuhov teorija. To ima za posledicu da i u slučaju "čiste" konvekcije imamo intenzivniji vertikalni prenos količine kretanja. Naravno i sami fluksevi toplote, pa i svih drugih pasivnih veličina, su veći nego pri potpuno haotičnom kretanju.

2.4.2 Veoma stabilna atmosfera

Kao "suprotnu" krajnost imamo slučaj $|\zeta| \ll 1$ uz $L < 0$. Ako je L negativno to znači da je fluks toplote usmeren od atmosfere ka podlozi. To dalje znači da dolazi do hladjenja najnižih slojeva atmosfere. Na taj način može da se formira, lokalno, veoma stabilna stratifikacija pa se ovaj slučaj naziva slučaj jake stabilnosti. Kako se ovo dešava u blizini tla na prvi pogled se može očekivati da visina, z , pripada skupu određujućih parametara. No ako je stabilnost, merena preko gradijenta potencijalne temperature, dovoljno velika tada rad na savladivanju sile potiska predstavlja dovoljno jak "otpor" formiranju najvećih mogućih turbulentnih elemenata, onih koji bi se prostirali do samog tla. Podsetimo se da se u uobičajenim situacijama po pravilu turbulentni elementi prostiru od uočene visine do samog tla. Drugačije rečeno u slučaju jako stabilne stratifikacije dolazi do efektivne izolacije podloge. Tako preostaju u_τ , βg i $\overline{w\theta_0}$ kao mogući određujući parametri. Sada kada smo formirali skup određujućih veličina (parametara) dimenzionom analizom se dobija, na primer za profil brzine srednjeg vetra:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \text{const} \frac{u_\tau}{L} \quad (2.33)$$

ili

$$\frac{\kappa z \partial U}{u_\tau \partial z} = \Phi_m = \text{const} \frac{u_\tau}{L} \quad (2.34)$$

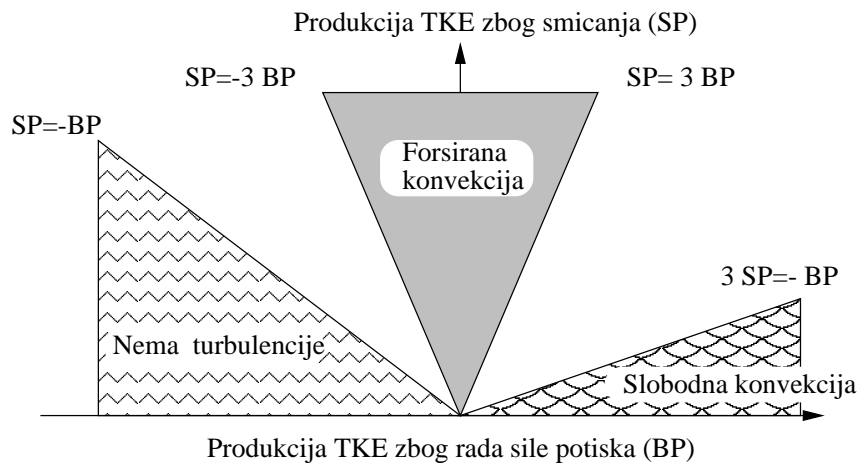
Iz Kansas eksperimenta može da se zaključi da se Φ_m ponaša kao:

$$\Phi_m \approx 1 + \frac{\beta z}{L} \quad (2.35)$$

a najbolje slaganje se dobija za $c=4.7$.

2.5 Ričardsonov broj.

Kada je razmatran problem nastanka turbulencije uveden je Rejnoldsov broj kao parametar čija vrednost pokazuje na režim toka fluida. Međutim, on ne uzima u obzir kako stratifikacija utiče na nastajanje/nestajanje turbulencije. Zato se u slučaju stratifikovanih fluida uvodi još jedan broj tzv. Ričardsonov broj, Ri , sa idejom da se i na osnovu njegove vrednosti može nešto reći o prirodi toka fluida (laminarno/turbulentno). Postoji više oblika ovog broja. Osnovni je onaj koji proističe iz jednačine za turbulentnu kinetičku energiju, kao količnik produkcije **tke** zbog rada sile potiska i produkcije zbog smicanja osnovne struje:



Slika 2.12: Shematski prikaz mogućih režima preko odnosa produkcije rada sile potiska (BP) i produkcije smicanja (SP), od slučaja kada ne može da nastane turbulencija zbog velike stabilnosti do slučaja slobodne konvekcije, (prema Stulu (24)).

$$Ri_f = \frac{-\beta g w \overline{\theta}}{-\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}} \quad (2.36)$$

ili u uobičajenom slučaju horizontalne homogenosti, pri kojoj dominiraju vertikalni fluksevi,

$$Ri_f = \frac{-\beta g \overline{w\theta}}{-\overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} - \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z}} \quad (2.37)$$

Kako je definisan preko flukseva količine kretanja i potencijalne temperature ovaj se oblik zove fluksni Ričardsonov broj, Ri_f . Ako se fluksevi napišu preko gradijenata srednjih veličina:

$$\overline{w\theta} = -K_h \frac{\partial \Theta}{\partial z} \quad (2.38)$$

i

$$\overline{wu} = -K_m \frac{\partial U}{\partial z} \quad (2.39)$$

odnosno

$$\overline{wv} = -K_m \frac{\partial V}{\partial z} \quad (2.40)$$

možemo definisati gradijentni Ričardsonov broj, Ri_g

$$Ri_g = \frac{-\beta g K_h \frac{\partial \Theta}{\partial z}}{K_m \left[\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right]} = Pr_t \frac{-\beta g \frac{\partial \Theta}{\partial z}}{\left[\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right]} \quad (2.41)$$

gde je odnos $Pr_t = K_h/K_m$ tzv. Prantlov turbulentni broj, analogno običnom Prantlovom broju kao količniku viskoznih koeficijenata prenosa toplote i količine kretanja $Pr = \alpha/\nu$. Osnovni razlog uvođenja Ri_g je nemogućnost definisanja Ri_f ako već ne postoji turbulencija. Definicija (2.41) naprotiv omogućuje određivanje Ri_g i kod laminarnog kretanja. Poznavanje njegove vrednosti i za laminarni tok je od značaja, jer kako ćemo pokazati, preko njega je moguće dijagnosticirati da li postoji mogućnost prelaska iz laminarnog u turbulentno kretanje, tj. on je parametar koji karakteriše stabilnost/nestabilnost posmatranog toka. Pretpostavimo za trenutak da nema disipacije i da je jedini izvor turbulencije smicanje osnovne struje a da je rad sile potiska negativan, tj. da je stratifikacija stabilna. Tada jednačina za **tke**, u prvju aproksimaciji i nakon zanemarivanja disipacije, postaje:

$$\frac{\partial q^2}{\partial t} = SPROD \left[1 + \frac{BPROD}{SPROD} \right] = SPROD [1 - Ri] \quad (2.42)$$

Relacija (2.42) pokazuje da je potreban uslov da bi se turbulencija održavala ili rasla $Ri \leq 1$. Na osnovu merenja kao i numeričkih simulacija, koja oba uključuju i disipaciju, dolazi se do procene da je potreban uslov za nastajanje turbulencije tzv. kritičan Ri broj, Ri_{kr} 0.19 – 0.21.

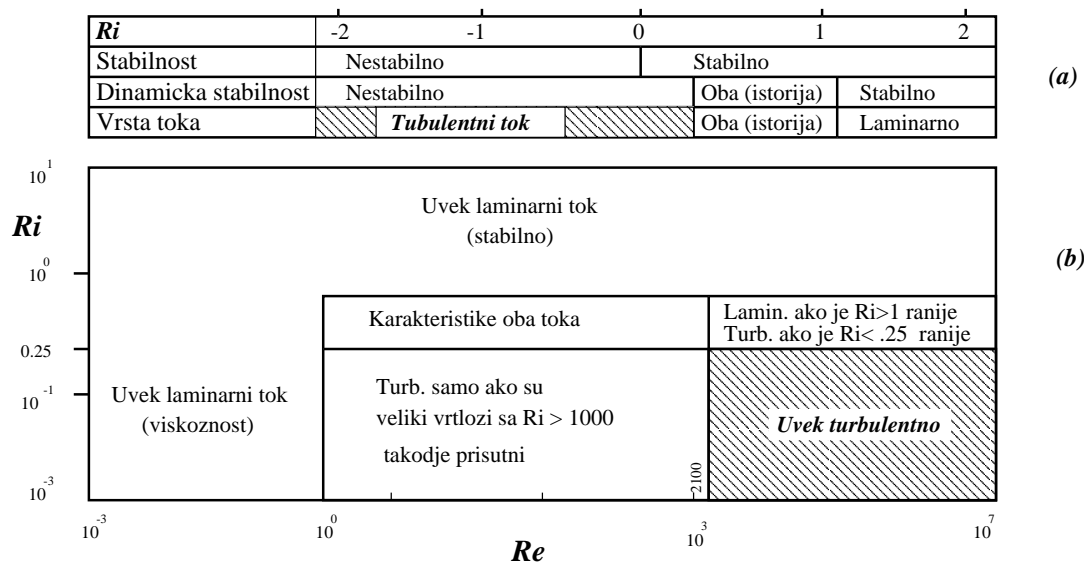
Na slici (2.12) dat je shematski prikaz mogućih režima prema odnosu rada sile potiska i produkcije zbog smicanja. Moguće vrednosti su uslovno podeljene u pet režima (opsega). Podela je naravno donekle proizvoljna ali uobičajena u meteorologiji gde se smatra da postoje znatnije razlike kada je odnos nekih veličina bar 3.

- Režim *I* nema turbulencije jer je produkcija zbog rada sile potiska veća od produkcije zbog smicanja, $|BPROD| > SPROD$, ali negativna.
- Režim *II*, kada je $|BPROD|$ negativna ali je manja od $SPROD$, i tada imamo turbulenciju u stabilno stratifikovanom fluidu.
- Režim *III*, kada je $SPROD$ između $-3BPROD$ i $3BPROD$. To je režim forsirane konvekcije i imamo turbulenciju.
- Režim *IV* je slučaj kada je i $SPROD$ i $BPROD$ pozitivno i imamo turbulenciju.
- Režim *V*, kada je $BPROD$ veće od $3SPROD$ imamo režim slobodne konvekcije sa najintenzivnijom turbulencijom.

Kako režim toka zavisi od vrednosti parametra Ri dat je na slici (2.13). Naravno, uvođenje Ri -a ne isključuje važnost ranije uvedenog Re -a. Tako donja shema, na istoj slici, prikazuje kombinovani $Ri - Re$ dijagram sa koga je moguće videti koji od režima (turbulencija ili laminarni tok) postoje kao i mogućnost prelaska iz jednog u drugi. Na kraju napomenimo da je Re za atmosferu tako veliki da deo prostora cwojida mu odgovara zauzme, ceo, krajnje desni deo donje sheme. To je upravo i razlog što se ponekad i zanemare efekti viskoznosti (mehaničkog trenja) dok su od primarnog značaja stabilnost i/ili postojanje zona velikog smicanja.

2.6 Izmešani sloj

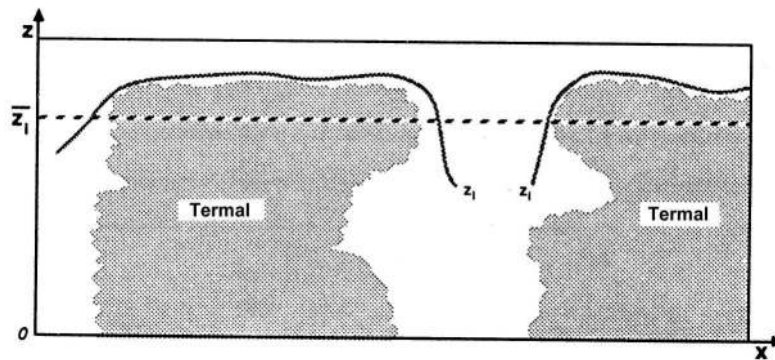
Do sada smo se uglavnom bavili površinskim slojem. Pored metodoloških razloga postoje i praktični razlozi za to jer većina merenja se vrši unutar površinskog sloja tako da se raspoloživo sa veoma malo eksperimentalnih podataka o karakteristikama turbulentnih kretanja iznad površinskog sloja. S obzirom na njegove dimenzije (35-80 % PGS-a) prisutnije su uredjene strukture većih razmera od onih u površinskom



Slika 2.13: *Mogući režimi toka fluida u zavisnosti od Ri broja (gornja shema) odnosno kombinovan uticaj Ri i Re brojeva (donja shema), (prema Stulu (24)).*

sloju, kao što su termali, vrtlozi u obliku horizontalnih rolni i konvektivne ćelije mezo razmera. Na slici (2.14) je prikazan vertikalni presek kroz idealizovan termal, dok na slici (2.15) imamo predstavljanje strukture izmešanog sloja preko lidarskog³ odraza na osnovu rasejanja na prisutnim aerosolima. Jasno se prepoznaju mesta uzlazne struje koje dostižu do vrha PGS-a odnosno do zone inverzije. Termali predstavljaju dominantan mehanizam prenošenja toplote pri slabom vetru. Ako je prisutan značajniji horizontalan vetar tada se generišu horizontalne rolne čija je idealizovana struktura prikazana na slici (2.16). Da li se nešto slično Monin-Obuhov teoriji može formulisati i za izmešani sloj? Dakle, da li je moguće naći nekakav analogon dužini Monin-Obuhova koji će omogućiti jedinstveno predstavljanje raznih profila iznad površinskog sloja? Jedan uspešan primer takvog jedinstvenog predstavljanja profila je dat na slici (2.17). Na toj slici, u levom delu, prikazani su profili flukseva toplote ($\overline{w\theta}$) unutar plan-

³Lidar je radar koji emituje laserski snop



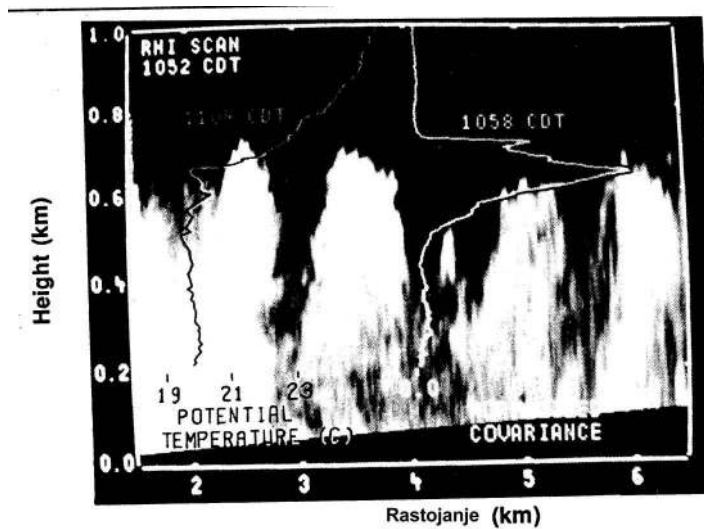
Slika 2.14: Vertikalni presek kroz PGS visine \bar{z}_i koji prikazuje idealizovane termale visine z_i , (prema Stulu (24)).

etarnog graničnog sloja. Ako se sada fluksevi toplote podele sa $(\overline{w\theta})_0$ a visine sa visinom planetarnog graničnog sloja u tom trenutku, koja je ovde obeležena sa z_i , i te bezdimenzionane kombinacije nacrtaju dobijamo sjajno slaganje u smislu da se sve krive, profili temperature za različite trenutke, grupišu oko jedne. Međutim, ovo je mnogo slabiji rezultat od slučajca kod površinskog sloja i L -a kao određujućeg dužinskog razmera jer visina inverzije z_i , tj. visina vrha planetarnog graničnog sloja je jedna od nepoznatih u problemu. Tako na neki način imamo situaciju "kokoška ili jaje". Fluksevi sigurno utiču na visinu PGS-a ali njihove vrednosti su određene trenutnom vrednošću visine PGS-a.

Svo dosadašnje izlaganje u vezi sa nestabilnom stratifikacijom moguće je sintetički prikazati kao na slici (2.18) gde je u levom delu (a) apscisa z/L dok je u desnom delu slike (b) apscisa z_i/L . Obe ose su u logaritamskoj razmeri. Kod stabilnih stratifikacija pokazalo se da ako se u izmešanom sloju umesto L uvede "lokalna" M-O razmera, L_l , koja ima isti oblik kao i L s tim što fluksevi momenta i toplote uzimaju lokalne vrednosti. Drugim rečima, lokalna, L_l se menja visinom z . Dakle

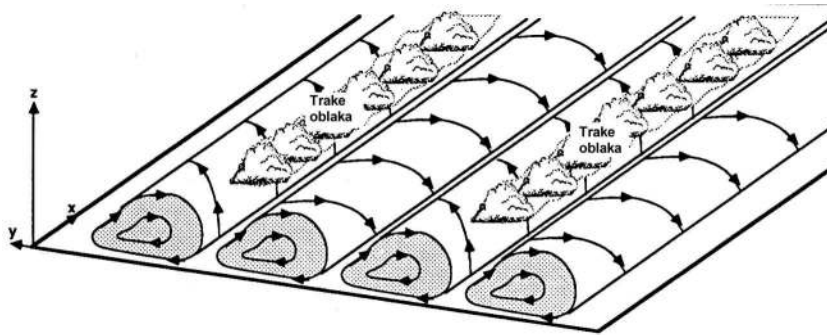
$$L_l = \frac{\Theta \overline{w u}^2 / 3}{\kappa g w \bar{\theta}} = f(z) \quad (2.43)$$

Sigurno je jedan od razloga zavisnosti lokalne Monin-Obuhov dužine od z -a činjenica da je kod stabilne stratifikacije režim je određen lokalno, onoliko koliko ima raspoložive **tke** da se vrši rad protiv sile

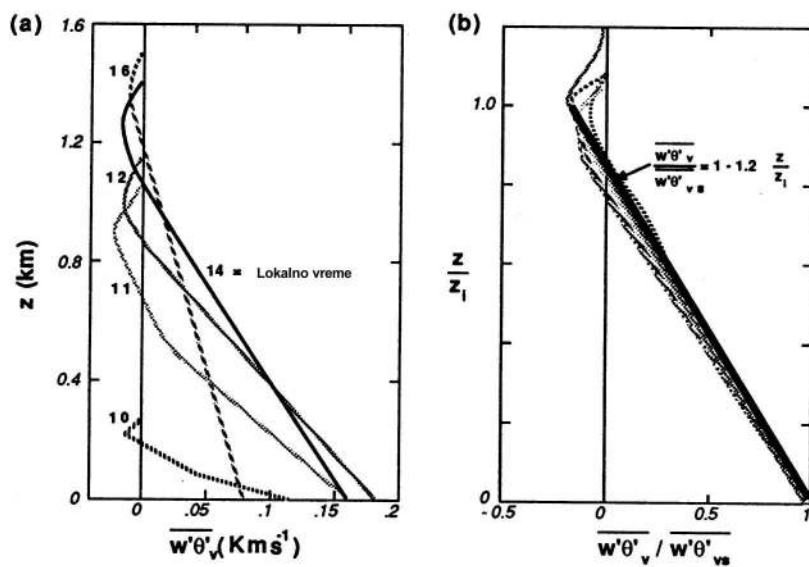


Slika 2.15: Izgled lidarske slike konvektivnih termika, gde se refleksija vrši na aerosolima koji su "pukpljeni" pri tlu, (prema Huperu (6)).

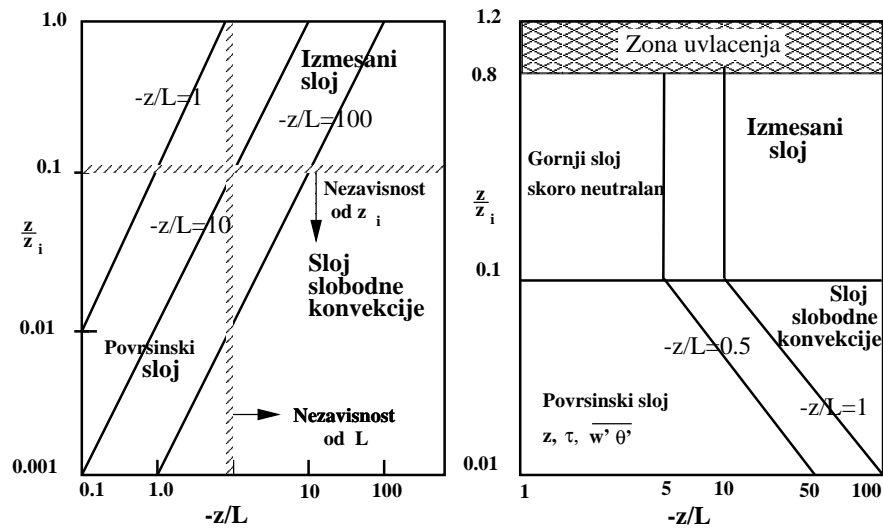
potiska. Analogno prethodnoj slici za nestabilne režime, stabilni režimi se mogu shematski prikazati kao na slici (2.19)



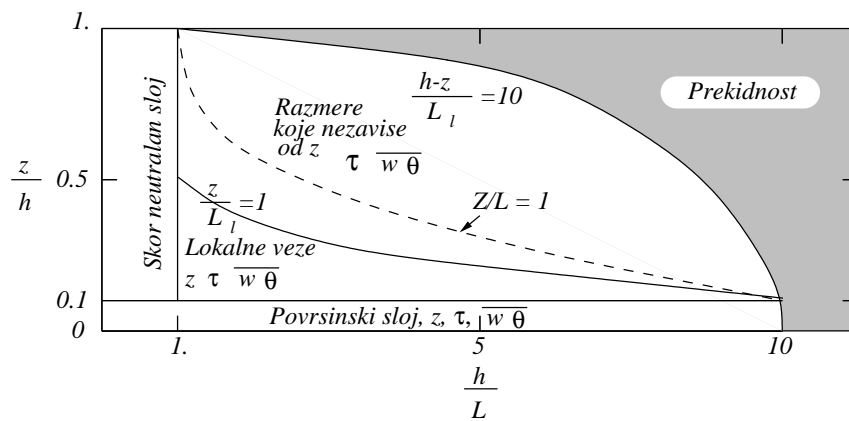
Slika 2.16: Tipičan izgled rolni u PGs-u , (prema Stulu (24)).



Slika 2.17: Profili fluksa toplote prema rezultatima Wangara eksperimenta prikazani: a) dimenziono $\overline{(w\theta)}_0$ prema z (km) i b) bezdimenziono $\overline{w\theta} / \overline{w\theta}_0$ prema z/z_i , (prema Stulu (24)).



Slika 2.18: Shematski prikaz različitih režima koji se mogu sresti u PGS-u. Uočiti da se apscise razlikuju na levom i desnom panelu, (prema Stulu (24)).



Slika 2.19: Kao na prethodnoj slici ali za stabilan slučaj, (prema Stulu (24)).

Statističke teorije turbulencije

3.1 Korelacione funkcije, integralni i mikrorazmer

Korelacioni metod odnosno korelacione funkcije su jedan od osnovnih načina opisivanja slučajnih promenljivih, a za to je turbulencija primer par excellence. Nije ni čudo da je N.A. Kolmogorov, koji je dao aksiomatske osnove računa verovatnoće, i u statističkoj teoriji turbulencije dao fundamentalne priloge. Korelacione funkcije se mogu definisati kako za skalare tako i za vektore odnosno tenzore. Tako imamo korelacione funkcije za: brzinu, temperaturu, gustinu, pritisak,..., i to ako je promenljiva prostorna koordinata, definišemo prostornu korelacionu funkciju, a ako je promenljiva vreme, definišemo vremensku korelacionu funkciju ili auto-korelacionu funkciju. Kada se uzima u obzir trodimenzionalnost prostora moguće je uopštiti korelacionu funkciju u korelacioni tenzor. U ovom odeljku mi ćemo se koncentrisati na polja homogene i izotropne turbulencije kao najprostije moguće slučajeve. Tada se promene svode na promene $\xi = \Delta x$ u nekom pravcu uslovno obeleženom sa x .

Primer 1. Prostorna korelaciona funkcija x komponente brzine:

$$R(\xi) = \frac{\overline{u(x_0 + \xi)u(x_0)}}{\overline{u(x_0)^2}} \quad (3.1)$$

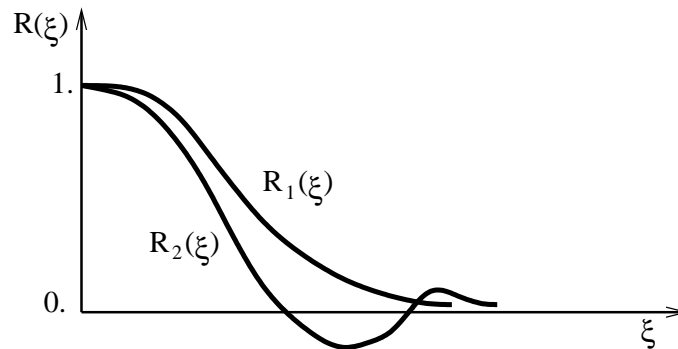
Primer 2. Vremenska korelaciona funkcija x komponente brzine:

$$R_E(\tau) = \frac{\overline{u(t_0 + \tau)u(t_0)}}{\overline{u(t_0)^2}} \quad (3.2)$$

Indeks E označava da je u pitanju Ojlerovska (Euler) korelaciona funkcija kod koje se merenja brzine vrše u fiksiranim tačkama a u različitim vremenskim trenucima $t = t_0$ i $t = t_0 + \tau$. Češće se posmatra Lagranžovska (Lagrange) vremenska korelaciona funkcija gde se ansambl delića prati u prostoru i korelišu se brzine sa krajeva vremenskog intervala $\tau = t - t_0$.

$$R_L(\tau) = \frac{\overline{u(t_0 + \tau)u(t_0)}}{\overline{u(t_0)^2}} \quad (3.3)$$

U prethodnim izrazima se pojavljuju veličine x_0 kao i t_0 ali to je samo radi jasnijeg opisa odnosno ukazivanja izmedju kojih tačaka, u slučaju prostorne korelacione funkcije, i kojih trenutaka, u slučaju vremenske korelacije, se računaju korelacije. Njihovo odsustvo na levim stranama jasno ukazuje da se radi o izotropnim odnosno homogenim poljima. Tipični oblici korelacionih funkcija su dati na slici (3.1)



Slika 3.1: Primeri tipičnih korelacionih funkcija kada: monotono opada $R_1(\xi)$, i kada teži nuli uzimajući i negativne vrednosti $R_2(\xi)$

Osnovni parametri korelacionih funkcija su integralni ili makrorazmer i mikrorazmer. Integralni ili makrorazmer se definiše kao

$$\Lambda = \int_0^{\infty} R(\xi) d\xi \quad (3.4)$$

Prema definiciji integralnog razmera sledi da on predstavlja površinu ispod korelacione krive. Analogno se definiše i vremenski integralni razmer

$$T = \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau \quad (3.5)$$

Iz oblika korelacionih funkcija vidi se postepeni prestanak uredjenosti nekoga polja: količine kretanja, pritiska, temperature... U dosadašnjem tekstu nekoliko puta je bila spominjana empirijska činjenica o postojanju vrtloga različitih vremenskih i prostornih razmera. Njihovo postojanje je implicitno pretpostavljeno već kod ideje o rastavljanju trenutnih vrednosti na srednju vrednost i odstupanje. Njihovo postojanje je čak i vizuelno moguće pokazati ukoliko se u fluid ubaci fluorescentna boja i osvetli se iz pogodnog ugla. Tada se jasno vidi postojanje vrtloga odnosno mikro strujica, različitih veličina kao i njihovo nastajanje i nestajanje. Takodje se može uočiti velika raznolikost u pogledu veličine tih vrtloga. Najveći vrtlozi su reda veličine samog graničnog sloja dok su najmanji za više redova veličine manji od najvećih. Kada bi se turbulentno polje sastojalo samo od najmanjih vrtloga situacija bi bila slična onoj kod kinetičke teorije gasova uz modifikaciju dužine "slobodnog puta". Kada bi bili prisutni samo najveći vrtlozi opet bi situacija bila mnogo jasnija jer, bar u principu, kada bismo se "spustili" na njihove razmere ili nešto ispod njih imali bi posla sa uredjenim strukturama, doduše koje nastaju ili nestaju ali na to smo već navikli u meteorologiji, recimo nastajanje i nestajanje ciklona ili anticiklona i sl. Upravo osnovni razlog za teškoće kod razumevanja i matematičkog opisivanja turbulentnih polja je teškoća da se predstavi postojanje vrtloga veoma različitih razmera i njihova neprestana interakcija.

No, vratimo se korelacionim funkcijama. Iz oblika korelacione funkcije možemo da dobijemo sliku, opis prostorne ili vremenske strukture turbulentnog polja. Tako, ako korelaciona funkcija brzo opada od početne vrednosti, koja je po definiciji $R(0) = 1$, to znači i da je u prostornom domenu (ako je reč o prostornoj korelacionoj funkciji) prisutan, statistički rečeno, priličan broj vrtloga razmera na kojima se uočava nagli pad vrednosti korelacione funkcije. Ako je, naprotiv, korelaciona funkcija "ravnija", sporije opada, to znači da su vrtlozi većih razmera, u poredjenju sa prethodnim slučajem, "prisutniji". Napomenimo da sasvim mali vrtlozi nemaju uticaja na porast/smanjenje haotičnosti kod većih razmera.

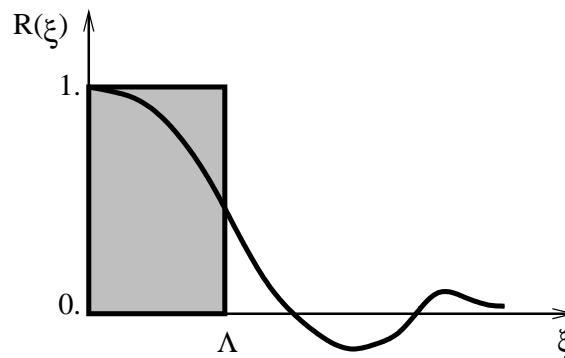
Oni samo homogenizuju polja na manjim razmerama. Posledice ovoga će kasnije biti detaljnije analizirane. Pokušajmo sada da razmotrimo slučaj laminarnog kretanja viskoznog fluida sa ovog stanovišta. Uočimo neki delić fluida i u misaonom eksperimentu pratimo ga duž njegove trajektorije. Tako recimo u slučaju toka preko ravne ploče ona je prilično pravolinijska. Ako sada izračunamo vrednost korelacione funkcije za taj delić, videćemo da je ona parktično stalno jednaka jedan. Razlog tome je što ono koje mi zovemo delić ima prostorne razmere koje su mnogo redova veličina veće od molekula koji bi jedini, sa svojim haotičnim kretanjima, mogli da smanje vrednost koeficijenta korelacije. Medjutiim, turbulentno kretanje se odlikuje postojanjem vrtloga raznih veličina koji nastaju i nestaju. Kakav je ukupan efekat vrtloga različitih veličina nije lako odmah razumeti. Zato, uprostimo sliku tako što ćemo analizirati pojave u sudu pravilnog geometrijskog oblika (recimo paralelopipeda) sa konvekcijom kod koga se turbulencija stvara zagrevanjem dna. Kada se dno zagreva, uopšte govoreći, topliji fluid isplivava a hladniji se spušta. Kako izgleda geometrija tog isplivavanja i spuštanja zavisi od razlike temperature dna i temperature fluida kao i od koeficijenta viskoznosti fluida. Prva istraživanja Barnar-a u laboratoriji su dala slike heksagonalnih ćelija kasnije nazvanih Barnar-ovih ćelija. Teorijsko objašnjenje je dao lord Rejli koji je objasnio formiranje ćelija kao uticaj uticaj viskoznosti i vertikalnog gradijenta temperature. Medjutim, u slučaju male viskoznosti situacija je drugačija. Situacija postaje komplikovanija u pogledu mogućih geometrija kretanja. Pri veoma malim vrednostima razlike temperatura, kao prvi uredjen oblik, javlja se cirkulacija sa jednom ćelijom. Pri daljem povećanju razlike temperatura javljaju se dve ćelije. Pri daljem povećanju duž osa ćelija pojavljuje se talasanje. Ako se ovo opiše pojmovima Furijeove analize prvi slučaj ima samo jedan harmonik sa jasno izraženom amplitudom, dok levo i desno od toga imamo šum. U drugom slučaju imamo dva harmonika pri čemu je talasna dužina drugog harmonika dva puta kraća od prve. Treća slika bi imala četiri harmonika čije su talasne dužine dva puta veće od odgovarajućih harmonika iz drugog slučaja.

Sistem jednačina koje opisuju konvekciju se svodi na sistem od tri zavisne promenljive čija se evolucija može predstaviti u faznom prostoru tako što eliminišemo vreme kao nezavisnu promenljivu. Svaka od promenljivih zavisi od vremena kao parametra (u matematici se govori o parametaraskim jednačinama krivih u prostoru). Tako, u početnom trenutku svaka od tri veličine ima neku vrednost i taj skup određuje tačku u faznom prostoru. Kako vreme prolazi tako se i tačka, koja reprezentuje stanje u tom trenutku "pomera" jer se vrednosti tri promenljive menjaju. Kriva u prostoru, koja spaja sve ove tačke je trajektorija. Ako je trajektorija krug tada je proces periodičan, karakteriše se jednom frekvencom, i to je naš prvi slučaj. ' Drugi slučaj, sa dva harmonika u faznom prostoru, je predstavljen sa dve skoro zatvorene krive (nalik na dva kruga uzajamno malo pomerenih) tako da se istorija ponavlja nakon prolaska preko, uslovno govoreći, obe krive. U poslednjem opisanom slučaju imamo složeniju putanju od "četiri " krive koje opet formiraju jednu zatvorenu krivu. Svaki od ovih procesa je periodičan, naravno sa različitim

periodima. Ovo sve još nikakve veze nema sa turbulencijom, već su to jedna za drugom *bifurkacije* (udvostručavanje) postojećih frekvenci. Pri daljem, ali još uvek veoma malom povećanju temperaturne razlike nešto se neobično dešava. Ako pratimo trajektoriju po kojoj se sistem kreće uočavamo da se ona nikada ne zatvara. Izraz uočavamo treba veoma uslovno shvatiti jer je putanja u tom slučaju tako jako komplikovana da su trebale godine analiziranja da bi se ona shvatila. No jedna stvar je neosporna, putanja se nigde ne zatvara, dakle proces je *neperiodičan*. Šta se dešava u trodimenzionalnom prostoru dok se ispisuje trajektorija u faznom prostoru? Neka sistem startuje sa uzlaznom strujom u sredini suda sa dve silazne u blizini zidova. No ova slika će da se menja (inače bi tačka u faznom prostoru stala) i uskoro može da se pojavi uzlazna struja duž oba zida a silazna oko sredine. Sve među varijante su moguće i pojavice se. Medjutim, na pitanje da li nakon jednog rasporeda uzlaznih i silaznih struja sledi neki drugi nema odgovora. Sistem *spontano* prelazi iz jednog stanja u drugo. Pitanje je da li se posle makar i veoma dugog vremena pojavi ista slika? Jer ako se to desi istorija nakon tog momenta se mora ponoviti i time je sistem završio osnovni ciklus i dalje sledi ponavljanje, ma koliko složenog oblika putanja bila. Odgovor na ovo pitanje je već dat sa oblikom trajektorije u faznom prostoru. Dakle, nikada se neće završiti ciklus i sistem se nikada neće ponoviti, a to znači da je sistem neprognozljiv. To već liči na turbulenciju jer smo dobili element haotičnosti. No, još uvek ne govorimo o punoj turbulenciji. Potrebno je dodatno povećanje gradijenta temperature da bi se pojavila puna turbulencija sa nastajanjem i nestajanjem turbulentnih elemenata i to svih mogućih veličina. Upravo je to nedostajući element u prethodnoj priči o konvekciji u zatvorenom sudu.

Ako sada računamo korelacionu funkciju za naš problem konvekcije možemo očekivati u početku, pri postojanju dve struje, da će korelaciona funkcija biti bliska jedinici do razmera polovine suda. Tako, dok smo unutar koherentne strukture jednog od vrtloga korelaciona funkcija će stalno biti bliska jedinici. Na većim razmerama, zbog uticaja drugog vrtloga, vrednost korelacione funkcije će se naglo smanjiti. Kada zbog povećavanja razlike temperatura fluida i dna suda slika postane složenija, jer se pojavljuju dodatni vrtlozi manjih razmera, korelaciona funkcija brže opada od vrednosti bliske jedinici. Nagib krive će biti veći kako se generišu sve manji i manji vrtlozi. Pri "punoj" turbulenciji imamo veliki raspon u razmerama vrtloga kao i različit broj vrtloga na različitim razmerama. I konačno postoji stalna interakcija (sudaranje) postojećih vrtloga.

Pored ove misaone analize konvektivnog mešanja, fizički smisao integralnog razmera se možda može bolje razumeti i na sledeći način. Pretpostavimo da uporedo sa realnim turbulentnim poljem imamo takvo slučajno polje kod kog je korelaciona kriva jednaka 1 do vrednosti Λ a iza toga jednaka nuli. Ovo je prikazano na slici (3.2), s tim što je uporedo prikazana i korelaciona kriva realnog turbulentnog polja. Dakle, imamo maksimalnu uredjenost (determinisanost) do razmera L , a tada nastupa potpuna neuredjenost i korelaciona kriva pada na nulu. Iz poredjenja stvarne i idealizovane korelacione funkcije



Slika 3.2: Uz definiciju integralnog razmera

možemo zaključiti da integralni razmer daje razmer turbulentnih elemenata koje bi imalo polje u kome imamo turbulentno kretanje, a koje se sastoji od skoro jednakih turbulentnih elemenata reda veličine integralnog razmera.

Pored integralnog razmera sledećim postupkom definiše se drugi prostorni razmer koji karakteriše polje turbulencije tzv. mikrorazmer. Za homogenu turbulenciju korelaciona funkcija je parna funkcija (zašto?). Zato možemo korelacionu funkciju, u okolini koordinatnog početka, da aproksimiramo sa kvadratnom funkcijom $f(\tau)$

$$R(\tau) \approx f(\tau) = 1 + a\tau^2 \quad (3.6)$$

gde parametar a definiše krivinu korelacione funkcije u $\tau = 0$. Uobičajeno je da se relacija (3.6) piše i u obliku:

$$f(\tau) \equiv 1 + \tau^2/\lambda^2 \quad (3.7)$$

gde λ predstavlja presek parabole i τ ose. Veličina λ se naziva vremenski mikrorazmer turbulencije. Potpuno analogno se definiše prostorni mikrorazmer turbulencije. Koji je njegov fizički smisao? Da bi odgovorili na ovo pitanje izvešćemo izraz za srednji gradijent brzine za homogenu i izotropnu turbulen-

ciju. U tom slučaju izraz (3.1) postaje:

$$R(\xi) = \frac{\overline{u(\xi)u(0)}}{\overline{u(0)^2}} \quad (3.8)$$

Ako sada $u(\xi)$ razvijemo u red oko tačke $\xi = 0$ dobijamo:

$$u(\xi) = u(0) + \xi \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_0 + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_0 \xi^2 + \dots \quad (3.9)$$

pa brojilac u izrazu (3.8) postaje

$$\overline{u(0)^2} + \xi \cdot \overline{\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_0 u(0)} + \frac{1}{2} \xi^2 \cdot \overline{\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_0 u(0)} + \dots \quad (3.10)$$

Zbog pretpostavke o izotropnosti i homogenosti važi:

$$\overline{\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_0 u(0)} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \overline{[u^2(0)]_0} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \overline{[u^2(0)]_0} = 0 \quad (3.11)$$

Dakle

$$R(\xi) = \frac{1}{\overline{u(0)^2}} \left[\overline{u(0)^2} - \frac{1}{2} \xi^2 \overline{\left[\frac{\partial}{\partial x} u(0) \right]^2} + \dots \right] \quad (3.12)$$

Kako je sa druge strane, prema definiciji mikrorazmera, koeficijent uz ξ^2 , u razvoju $R(\xi)$, jednak $1/\lambda^2$ sledi:

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\overline{2u(0)^2}} \overline{\left[\frac{\partial}{\partial x} u(0) \right]^2} \quad (3.13)$$

ili

$$\overline{\left[\frac{\partial u(0)}{\partial x} \right]^2} = \frac{2\overline{u(0)^2}}{\lambda^2} \quad (3.14)$$

pa se konačno za srednji gradijent brzine dobija:

$$\sqrt{\left[\frac{\partial u(0)}{\partial x}\right]^2} = \frac{\sqrt{2 \cdot u(0)^2}}{\lambda} \quad (3.15)$$

Iz ove relacije proizilazi da *srednji gradijent brzine* ima za karakteristični prostorni razmer upravo mikrorazmer, λ .

Pored relacije (3.15) mikrorazmer λ se takodje javlja u izrazu za srednju disipaciju. Da bi to pokazali uočimo delić fluida mase δm . Rad u jedinici vremena koji okolina vrši nad delićem dat je izrazom:

$$\delta m \frac{dW}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx} \cdot u_x) \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{yz} u_y) \delta x \delta y \delta z + \dots = \frac{\partial}{\partial x_k} (\tau_{ki} \cdot u_i) \delta V \quad (3.16)$$

ili

$$\frac{dW}{dt} = \alpha \frac{\partial}{\partial x_k} (\tau_{ki} \cdot u_i) \delta V \quad (3.17)$$

gde je

$$\alpha \equiv \frac{1}{\rho} = \frac{dV}{dm} \quad (3.18)$$

Kako je promena kinetičke i potencijalne energije jednaka radu napona po jedinici površine dobija se:

$$\frac{d(E_{kin} + E_{pot})}{dt} = \frac{d(u_i^2/2 + \Phi)}{dt} = \alpha u_i \frac{\partial \tau_{ki}}{\partial x_k} \quad (3.19)$$

Ukupna energija delića, zbir kinetičke, potencijalne i unutrašnje, $E = E_{kin} + E_{pot} + U$, prema prvom principu termodinamike, može da se promeni ako se vrši rad, dW , ili se dovodi/odvodi toplota, dQ :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dQ}{dt} + \frac{dW}{dt} \quad (3.20)$$

Iz prethodnih relacija promena unutrašnje energije, zbog viskozne disipacije, je:

$$\frac{dU}{dt} = \alpha \tau_{ki} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad (3.21)$$

Kako tenzor napona, kod viskoznog fluida, ima komponente:

$$\tau_{xx} = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot v + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \quad \tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad (3.22)$$

$$\tau_{yy} = \quad (3.23)$$

$$\tau_{xz} = \quad (3.24)$$

$$\tau_{zz} = \quad (3.25)$$

$$\tau_{zy} = \quad (3.26)$$

to je

$$\frac{dU}{dt} = \alpha\mu$$

$$\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right] \quad (3.27)$$

U slučaju homogene i izotropne turbulencije, izraz za srednju disipaciju je:

$$\bar{D} = \overline{\frac{dU}{dt}} \quad (3.28)$$

koji zbog relacija:

$$\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} = \overline{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2} = \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2} \quad (3.29)$$

i

$$\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} = \overline{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} = \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} = \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} = \overline{\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2} = \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2} \quad (3.30)$$

i

$$\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}\right)} = \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x}\right)} = \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z}\right)}^2 \quad (3.31)$$

postaje

$$\bar{D} = \frac{dU}{dt} = 6\nu \left[\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}\right)} \right] \quad (3.32)$$

Ovaj izraz se može i dalje uprostiti jer $\overline{\partial u/\partial x}$; $\overline{\partial v/\partial y}$ i $\overline{\partial u/\partial y \partial v/\partial x}$ takodje nisu medjusobno nezavisni. Izvodjenje te veze je dosta komplikovano i ovde će se prikazati samo konačni rezultat za disipaciju koji glasi:

$$\bar{D} = \frac{dU}{dt} = 7.5\nu \left[\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \right] \quad (3.33)$$

Kada se još uzme u obzir i definicija mikrorazmera, konačno se dobija:

$$\bar{D} = \frac{dU}{dt} = 15\nu \frac{\overline{u(0)^2}}{\lambda^2} \quad (3.34)$$

Ovaj rezultat nam omogućuje procenu vremena "gašenja" turbulencije. Neka se u nekom trenutku prekine transfer kinetičke energije iz srednjeg toka. Disipacija onda menja ("troši") turbulentnu kinetičku energiju brzinom:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q^2}{2} \right) = \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} \overline{u(0)^2} = \frac{\overline{u(0)^2}}{\lambda^2 \frac{1}{15\nu}} \quad (3.35)$$

Relacija (3.35) pokazuje da je vremenski razmer disipacije (vreme u kom q^2 opadne za faktor e), $\tau_{disp} = \lambda^2/7.5\nu$. Ponekad se iz ove relacije izvodi zaključak da se disipacija i dogadja na prostornom razmeru

reda λ . Ovo je pogrešan zaključak jer relacija (3.35) daje brzinu disipacije tj. njom se određuje vremenski razmer promene turbulentne kinetičke energije. Kasnije ćemo pokazati na kom se prostornom razmeru zaista događa disipacija i koja je veza između razmera disipacije i mikrorazmera. Kao ilustracija postupka kojim se povezuju $\overline{\partial u/\partial x}$; $\overline{\partial v/\partial y}$ i $\overline{\partial u/\partial x \partial v/\partial y}$ poslužiće sledeći problem.

Problem: Izvesti vezu između

$$\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}, \overline{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2} \quad \text{i} \quad \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}\right)}.$$

Podjimo od jednačine kontinuiteta za nestišljiv fluid:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.36)$$

Ako je kvadriramo i osrednjimo dobijamo:

$$\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2} + 2\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}\right)} + 2\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z}\right)} + 2\overline{\left(\frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}\right)} = 0 \quad (3.37)$$

Opet za izotropnu turbulenciju prva tri člana kao i druga tri člana su međusobno jednaka, što daje:

$$\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} = -2\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}\right)} \quad (3.38)$$

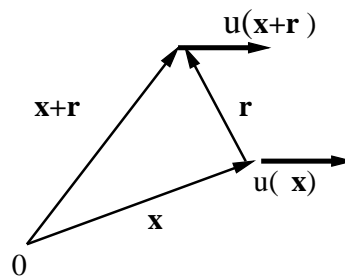
Na kraju napišimo jednačinu (3.38) u simetričnoj formi:

$$\frac{\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}\right)}}{\sqrt{\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \sqrt{\overline{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}}} = -\frac{1}{2} \quad (3.39)$$

3.2 Tenzor korelacije

Tenzor korelacije je uopštenje pojma korelacione funkcije, a koji se definiša sledeći način:

$$R_{ij} \equiv \overline{u_j(\mathbf{x}) \cdot u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r})} \quad (3.40)$$



Slika 3.3: Uz definiciju tenzora korelacije

ili kraće

$$R_{ij} \equiv \overline{u_i u_j} \quad (3.41)$$

Komponente brzine su predstavljene na slici (3.3) ; u_i je i -ta komponenta brzine u tački \mathbf{x} , a u_j j -ta komponenta brzine u tački $\mathbf{x}+\mathbf{r}$. Mi ćemo se u daljem izlaganju ograničiti na slučaj homogene i izotropne turbulencije. U okviru tenzorske analize dokazuje se da se svaki *izotropni* tenzor drugog reda može predstaviti u obliku:

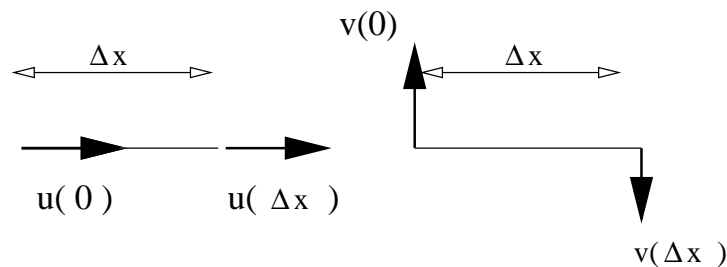
$$R_{ij}(r) = A(r) \cdot r_i r_j + B(r) \cdot \delta_{ij} \quad (3.42)$$

gde su $A(r)$ i $B(r)$ skalarne funkcije rastojanja r . Drugim rečima poznavanje tenzora korelacije, veličine sa 9 odnosno 6 komponenti, se u izotropnom slučaju svodi na poznavanje *dve* skalarne funkcije. U mikrometeorologiji je uobičajeno da se $R_{ij}(r)$ piše u nešto drugačijem obliku:

$$R_{ij}(r) = \overline{u^2(0)} \left[\frac{f(r) - g(r)}{r^2} r_i r_j + g(r) \cdot \delta_{ij} \right] \quad (3.43)$$

jer se funkcijama $f(r)$ i $g(r)$ mogu dati jednostavna fizička tumačenja. Tako se za $i = j = 1$ i $\mathbf{r} = (\xi, 0, 0)$ dobija:

$$R_{11}(\xi) = \overline{u^2(0)} \left[\frac{f(\xi) - g(\xi)}{\xi^2} \xi \xi + g(\xi) \cdot 1 \right] = \overline{u^2(0)} f(\xi) \quad (3.44)$$



Slika 3.4: Raspored brzina kod definicija funkcija $f(r)$ i $g(r)$.

Dakle

$$f(\xi) = \frac{R_{11}(\xi)}{u^2(0)} \quad (3.45)$$

predstavlja korelaciju komponente brzine u pravcu x -ose između dve tačke koje takodje leže na x -osi na međusobnom rastojanju x . Naravno, pošto je u pitanju izotropna turbulencija ovo važi i za druga dva pravca. Fizički smisao funkcije $g(r)$ dobićemo ako uzmemo $i = j = 2$ a opet $\mathbf{r} = (\xi, 0, 0)$. Tada se dobije:

$$g(\xi) = \frac{R_{22}(\xi)}{u^2(0)}. \quad (3.46)$$

Tako $g(\xi)$ predstavlja korelaciju komponente brzine u pravcu normalnom na x -osu, između dve tačke koje leže na x -osi na međusobnom rastojanju ξ . Raspored veličina koje definišu funkcije $f(r)$ i $g(r)$ je dat na slici (3.4). Uobičajeno je da se $f(r)$ naziva longitudinalna komponenta, a $g(r)$ transverzalna komponenta tenzora korelacije, prema njihovom položaju u odnosu na pravac koji spaja tačke u kojima se računa korelacija.

3.3 Elementi spektralne analize

Često se postiže bolje razumevanje procesa ili pojava ukoliko se izvrši tzv. spektralna analiza. Spektralna analiza je postupak određivanja skupa Furijeovih koeficijenata. Tu postoje dva osnovna slučaja.

Ako se analizira konačan skup vrednosti ili ako funkcija (veličina) uzima vrednosti sa konačnog intervala. Ako je u pitanju beskonačan interval tada se određuje Furijeov integral. Furijeov red/integral se može predstaviti preko skupa sinusnih ili kosinusnih funkcija ili, uz korišćenje Ojlerove formule, preko skupa kompleksnih funkcija, $\exp(i\omega t)$ za vremenski domen ili $\exp(ikx)$ za prostorni domen, gde su ω frekvencija a k talasni broj. U okviru prvog slučaja, konačnog domena, postoje dve mogućnosti: ili da je skup vrednosti nezavisnih promenljivih (t, x, \dots) diskretan ili da je kontinuiran. Diskretan skup se recimo uvek sreće kod rezultata merenja.

♣ Oblast definisanosti je konačan i diskretan skup : Neka je $A(x_k)$ izmerena veličina za vrednosti promenljive x_k (vreme, prostor...) i neka je uradjeno N merenja. Tada važi:

$$A(x_k) = \sum_{n=0}^{N-1} F_A(n) \exp \left[(2i\pi x_k \frac{n}{N}) \right] = \sum_{n=0}^{N-1} F_A(n) \exp [(i\omega_n x_k)] \quad (3.47)$$

$F_A(n)$ se naziva diskretan Furijeov transform veličine A . On se računa preko formule:

$$F_A(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A(k)}{N} \exp \left[(-2i\pi k \frac{n}{N}) \right] \quad (3.48)$$

U spektralnoj analizi, vremenskih promenljivih, često se sreću sledeće veličine:

- n broj ciklusa (po periodu T za vremenski domen) ,
- \tilde{n} broj ciklusa po sekundi n/T ,
- $f = \omega_n$ broj radijana po sekundi $= 2\pi n/T = 2\pi n/(N\Delta t)$

;

a za prostorni domen:

- k broj talasa (po intervalu L za prostorni domen).

Za $n = 0$, $F(0)$ predstavlja srednju vrednost. Osnovna frekvencija (talasni broj jedan) je za $n = 1$. Za $n = 2, 3, \dots$ imamo više harmonike osnovne frekvence ili veće talasne brojeve.

♣ Oblast definisanosti je kontinuiran konačan skup : U ovom slučaju se funkcija $A(x)$ predstavlja preko beskonačnog Furijeovog reda:

$$A(k) = \sum_{n=0}^{\infty} F_A(n) \exp \left[(i2\pi x \frac{n}{N}) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} F_A(n) \exp [(i\omega_n x)] \quad (3.49)$$

dok se izračunavanje Furijeovih koeficijenata $F_A(n)$ vrši pomoću formula: za srednju vrednost:

$$F_A(0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A(t) dt \quad (3.50)$$

za ostale koeficijente:

$$F_A(n) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A(t) e^{(-2i\pi n t)} dt \quad (3.51)$$

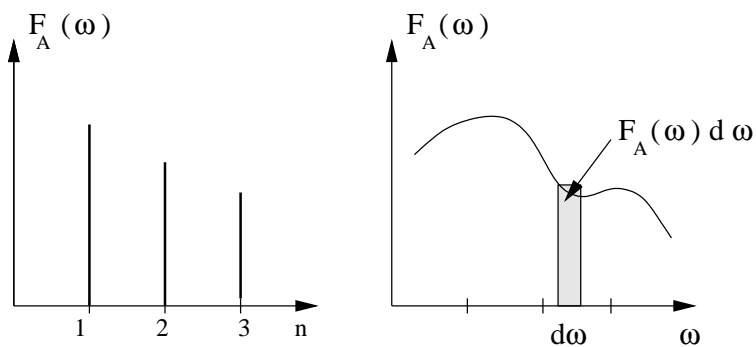
♣ Oblast definisanosti je skup $(-\infty, +\infty)$: Kada se želi razmatrati funkcija čija je oblast definisanosti beskonačan interval definisanosti ili ako je u pitanju neperiodična funkcijae (tada je oblast definisanosti skup $(-\infty, +\infty)$) mora se uopštiti teorija Furijeovih redova na Furijeov integral. Tada važi:

$$A(t) = \int_{\omega} F(\omega) e^{(i\omega t)} d\omega \quad (3.52)$$

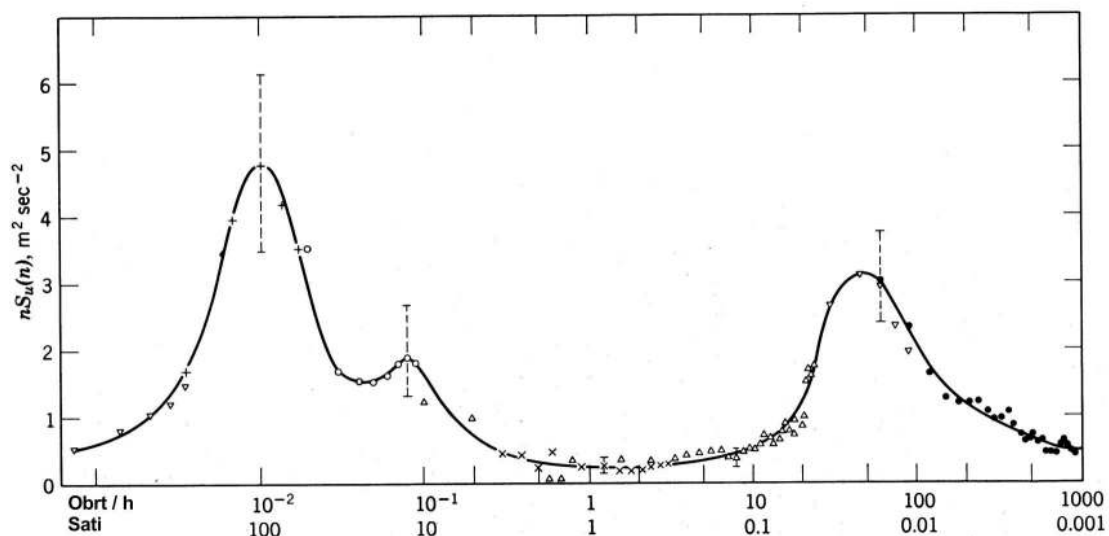
a spektralna funkcija $F(\omega)$ se izračunava:

$$F_A(\omega) = \int_t A(t) e^{(-i\omega t)} dt \quad (3.53)$$

Tako, kada se razmatraju neperiodični procesi ili ako je reč o teorijskim razmatranjima govori se o spektralnoj gustini, $F_A(\omega)$ ("spektar po jedinici ω "). Razmotrimo sada spektar intenziteta vetra u blizini tla prema računu koji je izveo Van der Hoven (3). Na apscisi su naznačeni broj ciklusa na sat, gornji red brojeva i periodi u časovima, donji red brojeva. Na ordinati je proizvod amplitude sa učestanošću. Veoma jasno su izražena tri maksimuma:



Slika 3.5: Primeri diskretnog spektra (levo) i kontinuiranog spektra (desno)



Slika 3.6: Shematski prikaz spektra vetra pri tlu prema računu Van der Hovena (3)

- prvi je kod perioda od oko četiri dana, što odgovara sinoptičkim vremenskim sistemima,
- drugi je kod perioda od 12 časova, koji je posledica dnevnog hoda brzine vetra,
- treći je kod perioda od oko jednog minuta, koji je odraz turbulentnih fluktuacija brzine vetra.

Može se uočiti izraziti nedostatak procesa sa periodom od oko desetak minuta do nekoliko časova; ova pojava se naziva spektralnim jazom. Često se procesi levo od jaza, a ako ih analiziramo metodama teorije turbulencije, nazivaju makroturbulencija, a procesi desno od jaza mikroturbulencija. Analiza makroturbulentnih procesa se najčešće vrši korišćenjem jednačina dinamike i termodinamike atmosfere, bez osrednjavanja. Medjutim, ako kretanja u atmosferi posmatramo sa planetarnih razmera može se i ovde uvesti aparat teorije turbulencije gde tada ciklone i anticiklone shvatamo kao turbulentne elemente jer njihovo nastajanje i nestajanje takodje karakteriše element slučajnosti odnosno nepredvidljivosti. U ovom pristupu se jedino mora uzeti u obzir kvazi-horizontalnost makroturbulentnih vrtloga.

Pored spektralne analize samih veličina kao brzine, temperature, pritiska itd. od interesa su i spektri kvadrata veličina. Na prvom mestu je kvadrat odstupanja brzine tj. **tke** ali i ostale kvadratne veličine, recimo auto-korelacione funkcije i sl. Tako, ako sa $q_2(t)$ obeležimo trenutnu vrednost **tke** na osnovu definicije spektra za konačan domen sledi:

$$q^2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{q^2}(n) e^{i\omega_n t} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} E_{kin}(n) e^{i\omega_n t} \quad (3.54)$$

dok u slučaju neperiodičnog ili beskonačnog domena važi:

$$q^2(t) = \int_{\omega} F_{q^2} e^{i\omega t} d\omega \equiv \int_{\omega} E_{kin}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.55)$$

Analogno u prostoru

$$q^2(x) = \int_k E_{kin}(k) e^{ikx} dk \quad (3.56)$$

pri čemu je uvedena oznaka E_{kin} za spektar **tke**. Napomenimo da je u literaturi uobičajena oznaka $E(k)$ za spektar **tke** što ćemo i mi u daljem tekstu raditi. Na osnovu ovih definicija možemo da formiramo jednačine koje opisuju evoluciju spektra turbulentne kinetičke energije. Mi ćemo se ovde ograničiti

samo na spektralnu reprezentaciju te jednačine (1.48), dopunjenu članovima za advekciju i turbulentnu difuziju **tk**. Njen izgled je:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} [U_k q^2 / 2] + \frac{\partial}{\partial x_k} [u_k u_i^2 / 2] = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \beta g_k \overline{u_k \theta} - \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad (3.57)$$

Čak i u ovako uprošćenom slučaju dobijanje Furijeovog transfera je komplikovano pa ćemo dati samo osnovne napomene. Furijeov transfer prvog člana se svodi na Furijeov transfer vremenskog izvoda **tk** jer su vreme i talasni broj nezavisni. Analogno su diferenciranje po prostoru i intrgaljenje po talasnom broju k nezavisni, s tim što se izvod funkcije $\exp(\mathbf{ik}x)$ po x svodi na množenje faktorom \mathbf{ik} . Drugi izvod, koji se javlja kod člana disipacije, se tada svodi na množenje faktorom $(\mathbf{ik})^2 = -k^2$ končno kako su talasni brojevi međusobno nezavisni integral prethodne relacije, napisan komponenta po komponenta doobija sledeći izgled:

$$\frac{\partial E(k, t)}{\partial t} + \frac{\partial Tr(t, k)}{\partial k} = -\phi(t, k) \frac{\partial U}{\partial z} + \beta g \gamma(t, k) - 2\nu k^2 E(t, k) \quad (3.58)$$

gde su:

- $\frac{\partial E(k, t)}{\partial t}$ lokalna promena k -te komponente spektra,
- $\frac{\partial Tr(t, k)}{\partial k}$ konvergencija transfera energije kroz spektar preko talasnog broja k ,
- $-\phi(t, k) \frac{\partial U}{\partial z}$ produkcija zbog smicanja k -te komponente spektra,
- $\beta g \gamma(t, k)$ produkcija zbog /protiv rada sile potiska k -te komponente spektra ;
- $-2\nu k^2 E(t, k)$ viskozna disipacija k -te komponente spektra.

a uz definicije za γ, ϕ i ε :

- $\overline{w\theta_v} = \int_0^\infty \gamma(t, k) dk,$
- $\overline{uw} = \int_0^\infty \phi(t, k) dk,$
- $\varepsilon = \int_0^\infty 2\nu k^2 E(t, k) dk.$

Advektivni član ne daje nikakav doprinos ako se učini pretpostavka da su fluksevi **tk** kroz bočne granice jednaki nuli.

3.4 Teorija sličnosti

Jedan od osnovnih problema statističke teorije turbulencije je upravo određivanje oblika funkcije $E(t, k)$. Problem još uvek nije rešen u celini, mada se poznaju formule za pojedine delove spektra. Mi ćemo se ograničiti na najprostiji moguć slučaj stacionarne, izotropne, homogene i mehaničke turbulencije kod koje je jedini izvor energije produkcija zbog smicanja. U tom slučaju spektar se ne menja sa vremenom. Analizu ovog slučaja uradićemo koristeći ideje teorije sličnosti koju je postavio 1941. A. N. Kolmogorov. Nezavisno od Kolmogorova Hajzenberg, Osanžer i Vajceker su došli do sličnih rezultata.

U osnovi ovih teorija je predstava da se polje kretanja, kod potpuno razvijene turbulencije, sastoji od niza elemenata raznih prostornih razmera koji se stvaraju i nestaju, a u toku svog "života" interaguju sa okolinom menjajući sebe i okolne elemente. Upravo spektar energije egzaktno opisuje ovu sliku, jer uz svaku grupu elemenata bliskih razmera se pridružuju Furijeovi koeficijenti. Tada, ako turbulentni elementi, za uočene razmere, poseduju više kinetičke energije vrednost Furijeovih koeficijenata, za ove elemente, će biti veća i obrnuto. Kako razmatramo stacionarnu turbulenciju oblik spektara se ne menja u vremenu tako da za ceo spektar disipacija kinetičke energije se nadoknadjuje transformacijom kinetičke energije srednjeg toka. Može se staviti primedba da ova razmatranja, o mehaničkoj turbulenciji odnosno o i prenosu energije iz srednjeg toka u turbulentni nemaju mnogo veze sa stanjem u atmosferi. U atmosferi kretanje se događa zbog pretvaranja *raspoložive potencijalne energije* koja postoji zbog horizontalnih razlika u zagrejanosti. Ove razlike su izrazite kod planetarnih razmera i kod sistema sinoptičkih razmera. Lokalno se mogu javiti i termičke razlike manjih razmera (cirkulacija more-kopno ili jutarnja odnosno večernja cirkulacija u planinskim predelima). Ali kod manjih razmera, razmera na kojima se javlja mikroturbulencija horizontalnih termičkih razlika praktično nema. Podsetimo se da je temperatura vazduha u hladovini i "na suncu" u granicama mogućnosti merenja ista. Naravno, vertikalni gradijent temperature, kako smo to već detaljno analizirali je važan izvor **tke**, ponekad i dominantan. Medjutim, kompleksnost turbulentnih tokova sa oba izvora **tke** onemogućava, za sada, analizu njenog spektra. Zato ćemo se u ovom delu izlaganja koncentrisati na slučaj kada je samo kinetička energija srednjeg toka izvor turbulentne kinetičke energije.

Usled prepreka pri tlu ili zbog unutrašnje nestabilnosti toka u PGS-u se formiraju relativno veći vrtlozi, od većih manji, od ovih još manji i tako sve dok ne dodjemo do vrtloga najmanjih razmera koji su dovoljno mali da se usled disipacije sva njihova kinetička energija pretvori u toplotu. ¹ Situacija je lepo opisana stihovima koji se pripisuju L.F. Ričardsonu:

- "Veliki vrtlozi imaju male vrtloge,

¹Ovo je tzv. Landau slika nastanka turbulencije koja se u poslednje vreme dovodi u pitanje.

- koji se hrane njihovom brzinom;”
- mali vrtlozi imaju manje vrtloge,
- i tako dalje do viskoznosti.”

² Koji to mehanizam obezbeđuje postojanje veoma široke skale talasnih brojeva, naravno ako je zadovoljena osnovna pretpostavka da je Re dovoljno veliki? To je *nelinearna interakcija* kao posledica nelinearnosti člana advekcije u jednačinama kretanja. Pretpostavimo da se u komponenta sastoji od samo dva talasa istih amplituda:

$$u(x) = U \sin(k_1 x) + U \sin(k_2 x) \quad (3.59)$$

Dakle spektar komponente brzine u se sastoji od samo dve vrednosti. U narednom trenutku prema jednačinama kretanja,

$$u^{\tau+1} = u^\tau + \Delta t (SGP + KOR + DIS + NL) \quad (3.60)$$

gde su oznake SGP za silu gradijenta pritiska, KOR za Koriolisovu silu, DIS za disipaciju i NL je oznaka za nelinearan član. Kao posledica prisustva nelinearnog člana:

$$\begin{aligned} NL &= u \frac{\partial u}{\partial x} + \dots = U \sin(k_1 x) U \cos(k_2 x) + \dots \\ &= \frac{1}{2} U \sin[(k_1 + k_2)x + \alpha_1] + \frac{1}{2} U \sin[(k_1 - k_2)x + \alpha_2] + \dots \end{aligned} \quad (3.61)$$

imamo da se generišu, pored prvobitnih brojeva k_1 i k_2 , novi talasni brojevi $(k_1 + k_2)$ i $(k_1 - k_2)$. Razmotrimo malo kakva je posledica međusobnog odnosa k_1 i k_2 . Ako je $k_1 \gg k_2$ tada je $k_1 + k_2 \approx k_1$ a $k_1 - k_2 \approx 0$ što znači da nelinearna interakcija veoma različitih talasa ne donosi ništa novo. Naprotiv, ako je $k_1 \approx k_2 \approx k$ tada je $k_1 + k_2 \approx 2k$ maksimalna moguća vrednost zbira. Iz ovih krajnjih mogućnosti jasno

²U svetlosti kritike Landau slike stvaranje manjih vrtloga iz većih se može zameniti interakcijom vrtloga bliskih razmera, pa se pesmica može preformulisati kao:

- ”Veliki vrtlozi interaguju sa malim vrtlozima,
- koji se hrane njihovom brzinom;
- mali vrtlozi interaguju sa manjim vrtlozima,
- i tako dalje do viskoznosti.”

sledi da se nelinearnom interakcijom sličnih talasnih dužina (razmera) postiže najveći efekat. Generisanjem sve većih i većih talasnih brojeva kao i njihovom međusobnom interakcijom ubrzo se spektar "popuni" sa svim mogućim talasnim brojevima. Disipacija **tke** je mehanizam koji na kraju "zaustavi" ovaj proces. Ona, naravno, postoji kod svih razmera kretanja. Ipak, najveći deo disipacije se događa kod najmanjih elemenata (najvećih talasnih brojeva), jer ona raste sa kvadratom recipročne vrednosti karakteristične prostorne razmere turbulentnih elemenata. Zaista, ako u član za disipaciju $\nu \partial^2 U / \partial x^2$ uvrstimo karakteristične vrednosti za odgovarajuće veličine, za razmer disipacije dobijamo $\nu U / L^2$.

Videli smo da se spektar formira kao posledica nelinearnih interakcija. Kako on izgleda? Metodologija kojom ćemo pokušati da odredimo oblik spektra je teorija sličnosti. Njena osnovna hipoteza je da su *statističke karakteristike napisane u bezdimenzionalnoj formi preko odgovarajućih parametara, za dovoljno velike talasne brojeve tj. dovoljno "daleko" od najvećih elemenata kod kojih se još "oseća" uticaj karakteristika srednjeg toka, univerzalne*. Tako se onda može tražiti formula za taj deo spektra koji bi trebalo da je isti za sve "turbulencije". Treba stalno imati na umu uslov da Rejnoldsov broj mora biti dovoljno veliki da bi se taj deo spektra uopšte razvio. Karakteristike vrtloga tih razmera su u velikoj meri slučajne. Za njih će npr. svi pravci, statistički posmatrano biti ravnopravni, tj. turbulentni elementi, vrtlozi, će biti izotropni bez obzira na orijentaciju najvećih vrtloga. Kao ilustracija mogu da posluže merenja Tausenda (1948) pri opticanju fluida oko dugačkog cilindra. Ako je Rejnoldsov broj bio dovoljno veliki kretanje je bilo turbulentno i to tako da se u neposrednoj blizini cilindra jasno uočavala neizotropnost kod najvećih vrtloga, ali se dalje od prepreke pokazuje da su vrtlozi manjih razmera približno izotropni.

Ako statističke osobine malih vrtloga ne zavise od karakteristika vrtloga sa najviše energije, postavlja se pitanje od čega ove osobine zavise. Kolmogorov je pretpostavio da su određujući parametri brzina disipacije ϵ i koeficijent viskoznosti ν i, naravno, nezavisna promenljiva, talasni broj k . Dakle pretpostavka je da važi:

$$E(k) = f(\nu, \epsilon, k) \quad (3.62)$$

Sledeća tabela daje dimenzije veličina koje se pojavljuju u relaciji (3.62). Iz ove tabele, na osnovu

veličina	$E(k)$	ν	ϵ	k
dimenzije	$L^3 T^{-2}$	$L^2 T^{-1}$	$L^2 T^{-3}$	L^{-1}

Tabela 3.1: Veličine i njihove dimenzije koje određuju oblik spektra **tke** u ravnotežnoj oblasti

zahteva za dimenzionalnom homogenošću leve i desne strane relacije (3.62), sledi da je:

$$\frac{E(k)}{v^{5/4}\epsilon^{1/4}} = f\left[\frac{k}{v^{-3/4}\epsilon^{1/4}}\right] \quad (3.63)$$

Dakle dobijena je funkcionalna veza sa jednim argumentom. Napomenimo da je pretpostavka o zavisnosti $E(k)$ samo od v i ϵ sadržaj takozvane prve hipoteze Kolmogorovljeve teorije sličnosti. Oblast spektra za koji važi ova hipoteza se naziva *ravnotežna oblast*. Naziv potiče od pretpostavke da se uspostavilo stacionarno stanje u kom je sav priliv energije od većih talasnih brojeva uravnotežen njenom disipacijom.

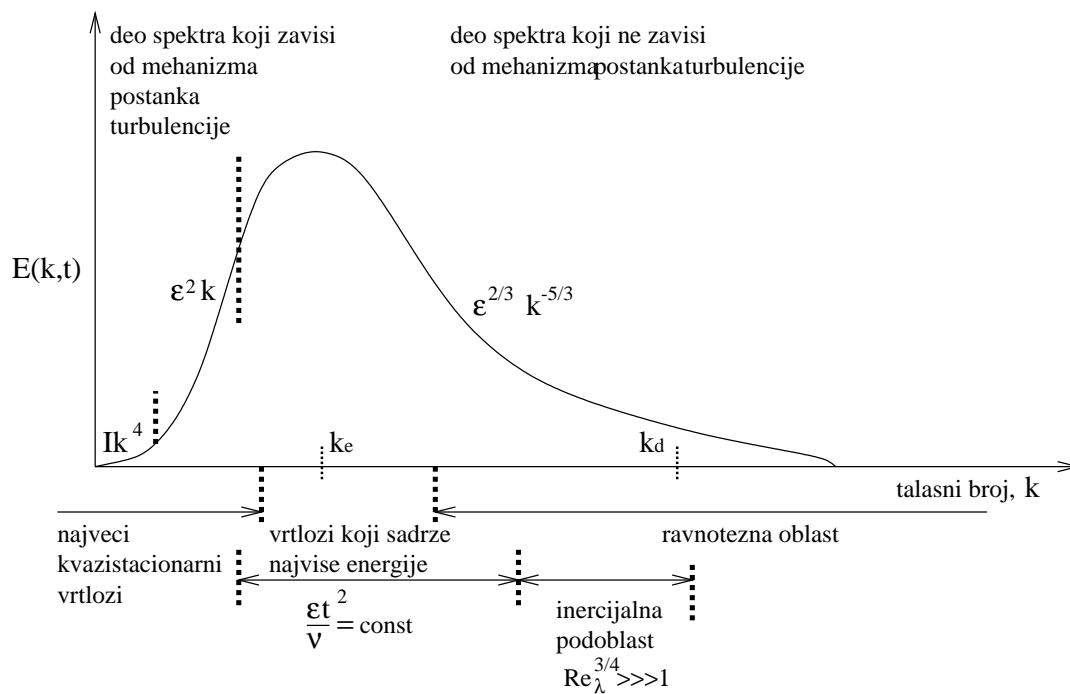
Druga hipoteza Kolmogorova pretpostavlja još veće Rejnoldsove brojeve. Sa povećanjem Rejnoldsovog broja obrazuju se još manji turbulentni elementi, i proširuje se ravnotežna oblast. Ako je sada ravnotežna oblast dovoljno široka može se pojaviti situacija kada elementi sa "početka" ravnotežne oblasti gotovo da i ne učestvuju u disipaciji. To onda znači da ni statističke karakteristike tih elemenata ne zavise od disipacije, što na kraju dovodi do zahteva da njihove statističke osobine ne treba da zavise od v . Turbulentni elementi se unutar te oblasti moraju podesiti tako da se njihovim međusobnim interakcijama (inercijalnim silama) izvrši transport energije ka manjim razmerama, otprilike jednak ukupnoj disipaciji. Tako dobijamo drugu Kolmogorovljevu hipotezu sličnosti: *Pri dovoljno velikim Rejnoldsovim brojevima postoji unutar ravnotežne oblasti, sa strane većih razmera, inercijalna podoblast u kojoj statističke osobine turbulentnih elemenata zavise samo od veličina ϵ i k .*

Ovaj dodatni uslov omogućava da se eksplicitno dobije zavisnost $E(k) = f(k)$. Zaista ako u relaciji (3.63) v ne sme da se pojavi onda funkcija f mora biti algebarska, čiji je stepen određen postavljenim zahtevom. To dovodi do relacije:

$$E(k) = \text{const } \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (3.64)$$

Ovo je čuveni $-5/3$ -ski zakon. Na slici (3.7) dat je idealizovan i prikaz spektra kinetičke energije kod mehničke turbulencije. To je sintetički izraz znanja o tom spektru. Njegova formula koja bi pokrivala sve talasne brojeve još nije poznata ali se znaju aproksimacije za pojedine delove. Gornje izvodjenje za ravnotežnu oblast je jedan takav primer. Vidimo da se, grubo, spektar može podeliti na tri grupe talasnih brojeva:

- najveći turbulentni elementi (vrtlozi),
- turbulentni elementi (vrtlozi) koji sadrže najviše energije,



Slika 3.7: Shematski prikaz spektra. Naznačene su oblasti vrtloga najvećih razmera, zatim oblast gde je maksimum kinetičke energije, kao i ravnotežna oblast koja sadrži inercijalnu podoblast. Takođe su naznačene neke od funkcija koje opisuju pojedine delove spektra. Za prvi deo spektra k^4 i $\epsilon^2 k$ i za ravnotežnu oblast $\epsilon^{2/3} k^{-5/3}$.

- ravnotežna oblast.

Svaka od ovih oblasti može imati svoje podoblasti u kojima se mogu dobiti lokalne zavisnosti od talasnog broja k . Tako u prvoj grupi uočavamo početni deo sa porastom srazmeran sa k^4 , zatim sledi linearni rast po k . Iz drugog dela nemamo nijednu relaciju, a kod ravnotežne oblasti imamo $-5/3$ -sku zavisnost. Ako želimo da primenimo teoriju sličnosti na neku drugu veličinu, moramo prvo da razmotrimo da li ta veličina u veoma velikoj meri treba da zavisi od osobina turbulentnih elemenata manjih

razmera. Odgovor ovde obično mora da se donese intuitivnim putem. Ako smatramo da treba, odmah zaključujemo da je posmatrana veličina funkcija v i ε , i nezavisno promenljivih koje ulaze u njenu definiciju. Dalji zaključci se donose prvenstveno dimenzionalnom analizom ali i svim ostalim relacijama za koje očekujemo ili znamo da važe. Konačno, ako je u pitanju dovoljno veliki Rejnoldsov broj primenjuje se i druga hipoteza.

3.5 Kolmogorovljeva teorija mikroturbulencije; Strukturna funkcija

Pored opisa turbulencije preko spektra neke veličine, Kolmogorov je predložio da se za prikaz turbulencije definišu tzv. strukturne funkcije. Na primer strukturna funkcija x-komponente brzine u , definiše se na sledeći način:

$$D_{uu} = \overline{[u(x+r) - u(x)]^2} \quad (3.65)$$

ili uopšte za veličinu A :

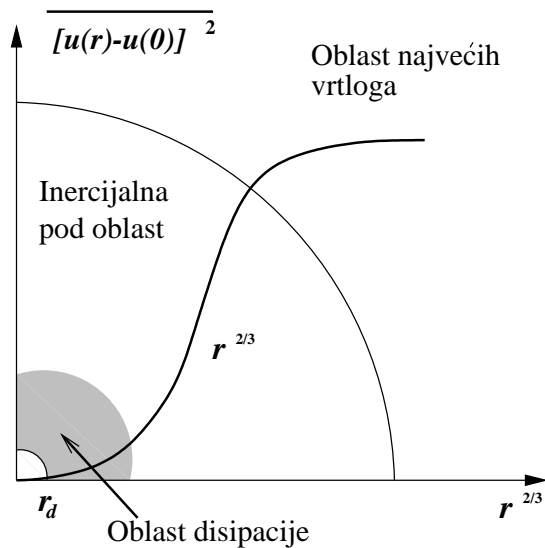
$$D_{AA} = \overline{[A(x+r) - A(x)]^2} \quad (3.66)$$

Ako se prihvate pretpostavke iz prethodnog odeljka može se pokazati, dimenzionalnom analizom, da za inercijalnu podoblast važi relacija:

$$D_{uu} = \text{const} \cdot \varepsilon^{2/3} r^{2/3} \equiv C_A r^{2/3} \quad (3.67)$$

Ova relacija predstavlja pandan $-5/3$ -om zakonu, samo sada u 3-D prostoru. Veličina C_A se naziva parametar strukturne funkcije. Na slici (3.8) je dat shematski prikaz jedne strukturne funkcije. U samoj okolini koordinatnog početka, za veoma malo r , sve do nekog r_d nema turbulentnih elemenata. Zatim sledi oblast disipacije koja prelazi u inercijalnu podoblast, ako je Re dovoljno veliki. Tu strukturna funkcija ima oblik $r^{2/3}$. Kada se izadje iz ravnotežne oblasti dolazi oblast turbulentnih elemenata sa najviše kinetičke energije i na samom kraju je oblast najvećih turbulentnih elemenata. Strukturni parametri se takodje pojavljuju u relacijama koje pokazuju koliko se emitovane energije signala (zvučnog ili mikro-talasnog) vraća usled promene indeksa prelamanja u atmosferi. Ta reflektivnost je srazmerna upravo strukturnom parametru kao i recipročnoj vrednosti kubnog korena talasne dužine signala. Kad se, na osnovu dimenzionalne analize, odrede strukturni parametri može se izraziti brzina disipacije ε , temperature, vlage itd.

$$C_T^2 = 2.68 (\beta g)^{-2/3} \left(\frac{z}{w\theta_0} \right)^{-4/3} \quad (3.68)$$



Slika 3.8: Shematski prikaz strukturne funkcije u zavisnosti od relativnog rastojanja r

što omogućava određivanje fluksa toplote, ako se poznaje C_T . Zatim Wingard i Lemon (1980) smatraju da se veličine promene temperature i vlažnosti preko inverzije na vrhu PBL-a takodje mogu izraziti preko C_T a i C_q , strukturnih parametara za temperaturu i vlagu.

Na kraju pokažimo da je strukturna funkcija za slučaj homogene i izotropne turbulencije u vezi sa korelacionom funkcijom. Podjimo od definicije strukturne funkcije D_{uu} ,

$$D_{uu} = \overline{[u(x+r) - u(x)]^2} = \overline{[u(x+r)^2 - 2u(x+r)u(x) + u(x)^2]} = \overline{2u(x)^2} \left[1 - \frac{\overline{2u(x+r)u(x)}}{\overline{u(x)^2}} \right] \quad (3.69)$$

U slučaju homogene turbulencije $\overline{u(x+r)^2} = \overline{u(r)^2}$, a takodje je $\overline{u(x)^2} = \overline{u(0)^2}$ pa se konačno dobija:

$$D_{uu} = \overline{2u(0)^2} [1 - R(r)] \quad (3.70)$$

Za inercijalnu podoblast $D_{uu} = \text{const}(\epsilon r)^{2/3}$ pa je:

$$R(r) = \left[1 - \frac{2\alpha(\epsilon r)^{2/3}}{u(0)^2} \right] \quad (3.71)$$

Konstanta α je na osnovu merenja procenjena na 0.5 tj $2\alpha \sim 1$.

3.6 Prostorne i vremenske razmere kod homogene i izotropne turbulencije

Videli smo u odeljku o teoriji sličnosti da se spektar može grubo podeliti u 3 ili 4 oblasti u zavisnosti od veličine Re . Moguće je formirati karakteristične razmere za pojedine delove spektra. Tako se u oblasti disipacije gde su karakteristični parametri prema hipotezama Kolmogorova *vie*, dimenzionalnom analizom dobija:

razmer brzine:

$$v_d \approx (v\epsilon)^{1/4} \quad (3.72)$$

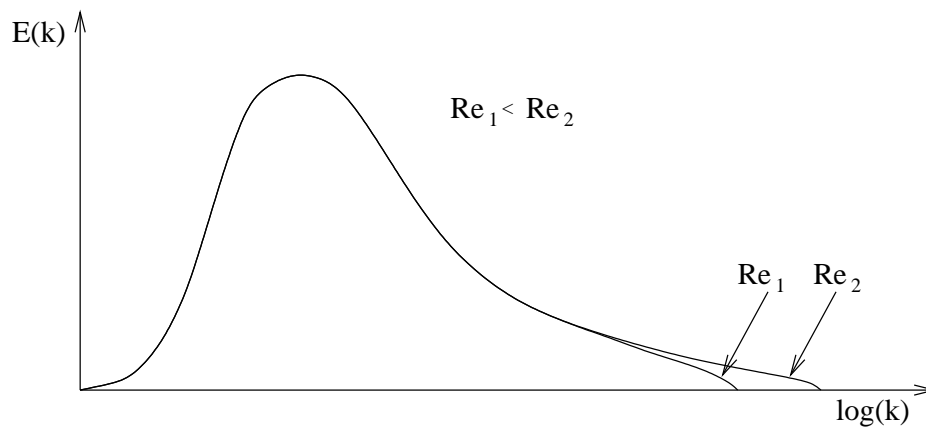
razmer dužine:

$$\eta_d \equiv \frac{1}{k_d} \approx v^{3/4} \epsilon^{-1/4}. \quad (3.73)$$

Polazeći od ova dva razmera može se dati definicija lokalnog Re :

$$Re_d = \frac{v_d \eta_d}{\nu} \approx 1 \quad (3.74)$$

Ovaj, na prvi pogled, slučajni rezultat to nikako nije. Jer ako posmatramo Re kao odnos inercijalnih i viskoznih sila, za razmere disipacije se prvi put postiže njihova jednakost. To dalje znači da još manji turbulentni elementi ne mogu ni nastati. Ako se želi proširenje spektra mora se povećati Re glavnog toka što fizički znači da će doći do povećanja priliva energije od srednjeg toka. Na slici (3.9) je shematski prikazana promena u obliku spektra pri povećanju srednjeg Re . Da bi se na novom nivou energije uspostavila stacionarnost mora se povećati i disipacija. Kako dotle formirani najmanji elementi ne mogu



Slika 3.9: Shematska ilustracija promene oblika ("produženja") spektra nakon povećanja Re

da potroše povećanu količinu energije moraju se formirati još manji i, taj proces generisanja sve manjih i manjih elemenata trajaće sve dok se ponovo ne uspostavi stacionarnost.

Za deo spektra koji sadrži najviše energije možemo definisati više dužinskih razmera. Jedan bi bio integralni razmer L . Međutim, sa praktičnog stanovišta ovakva definicija nije zgodna jer pretpostavlja poznavanje korelacione funkcije. Druga mogućnost je da se iskoristi 2/3-ski zakon, koji važi za inercijalnu podoblast, tako što se njegovo važenje ekstrapoliše do razmera na kojima se sadrži najviše turbulentne kinetičke energije. U sistemu gde je apscisa $r^{2/3}$, funkcija $f(r^{2/3})$ predstavlja pravu liniju za deo koji odgovara inercijalnoj podoblasti. Ekstrapolacijom do preseka sa $r^{2/3}$ -osom možemo smatrati da se definiše traženi razmer L :

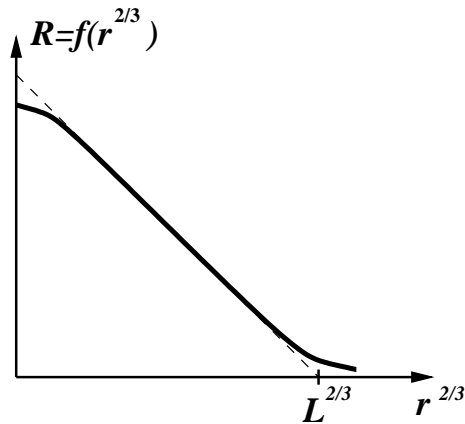
$$\left[1 - \frac{2\alpha(\epsilon r)^{2/3}}{u(0)^2} \right] = 0 \quad (3.75)$$

Iz ove relacije sledi za L :

razmer dužine:

$$L \approx \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\overline{u(0)^2}}{2\alpha} \right]^{3/2} \quad (3.76)$$

Za razmer brzine, s obzirom da smo u delu spektra gde je najviše turbulentne kinetičke energije uzi-



Slika 3.10: Uz definiciju makro razmera L

mamo:

razmer brzine:

$$U = \sqrt{\overline{u^2}} = \sqrt{\frac{q^2}{3}} \quad (3.77)$$

Sada se može definisati lokalni Rejnoldsov broj Re_L kao:

$$Re_L = \frac{UL}{\nu} = \sqrt{\overline{u^2}} \frac{L}{\nu} \approx \frac{\overline{u(0)^2}}{\varepsilon \nu} \quad (3.78)$$

Interesantno je odrediti odnose makrorazmera L i razmera disipacije η_d :

$$\frac{L}{\eta_d} = (2\alpha)^{\frac{-3}{2}} Re_L^{3/4} \approx Re_L^{3/4} \quad (3.79)$$

odnosno odgovarajućih razmera brzina:

$$\frac{U}{v_d} \approx Re_L^{1/4} \quad (3.80)$$

Kako smo ranije definisali mikrorazmer turbulencije λ i pokazali da važi $\varepsilon = 15 \overline{u(0)^2} / \lambda^2$ može se naći odnos razmera L i η_d sa mikrorazmerom λ . Tako se dobija:

$$\lambda \approx \eta_d \sqrt{Re_L} \quad (3.81)$$

ili

$$\lambda \approx L Re_L^{-5/8} \quad (3.82)$$

Takodje se može definisati lokalni $Re_\lambda = \lambda U / \nu$ i tada važi:

$$Re_L = 15 Re_\lambda^2 \quad (3.83)$$

Ovi rezultati ukazuju na to da je veoma teško napraviti dobru separaciju unutar spektra energije tako da se teško razlikuje oblast sa najviše energije od ravnotežne oblasti. Razlaganje ravnotežne oblasti na inercijalnu podoblast i oblast disipacije je naravno još problematičnije i uglavnom se i ne može dobiti u laboratorijskim uslovima kod mehaničke turbulencije. Kao primer neka posluže rezultati iz laboratorijskog generisanja turbulencije duvanjem vazduha kroz gustu mrežu. Neka je rastojanje između proreza M . Tada je Reynoldsov broj $Re_M = MU / \nu$. Pri vrednostima za Re_M od 5 600 do 45 000 dobijeno je:

*(ovo verovatno nije pouzdan rezultat jer se kod svih drugih slučajeva uočavaju drugačije tendencije pri promeni Re -a.)

U atmosferi, a naročito u okeanu pri nailasku plime, sreću se dovoljno veliki Re ali uz prisustvo nehomogenosti u gustini pa se na osnovu merenja u ovim slučajevima ne mogu izvlačiti direktni zaključci o potvrdi ili osporavanju Kolmogorovljeve teorije.

Re_M	Re_L	Re_λ	Re_M/Re_L	L/λ	λ/η_d
5600	6600.	21.85	0.85	243.90	81.24
11600.	14400.	31.81	0.81	397.17	120.00
22500.	30400.	45.74	0.74*	633.57	174.36
45000.	57000.	62.78	0.79	938.47	238.75

Tabela 3.2: Tabela vrednosti raznih Re i odnosa nekih dužinskih razmera. U prvoj koloni je Re_M , tako da kažemo polazni Re . Zatim Re_L broj za razmere koje sadrže najviše kinetičke energije. U sledećoj koloni je Re_λ za mikrorazmer, a u zadnje dve kolone su odnosi L i λ odnosno λ i η_d

3.7 Turbulentna difuzija

Problem turbulentne difuzije je veoma važan u praktičnoj primeni. Potrebno je poznavati difuziju raznih štetnih gasova, na primer gasovitih radioaktivnih proizvoda kod nuklearnih centrala ili otpadnih gasova iz fabričkih dimnjaka i sl. Tada se iz poznate emisije i propisa o dozvoljenoj maksimalnoj koncentraciji pri tlu moraju proračunati minimalne visine dimnjaka. Ili, kao drugi primer, gde postavljati postrojenja koja su potencijalni zagadjivači ili čitave industrijske zone, na kom rastojanju od naselja, u kom pravcu u odnosu na dominantne vetrove.

Opšti prikaz oblasti turbulentne difuzije se nalazi u udžbeniku od Paskvil-a (21) zatim u člancima Tejlor (27), Monin (18). Odlična diskusija o turbulentnoj difuziji se može naći u referenci (25). Osnovna veličina koja je od interesa u problemu difuzije je raspodela koncentracije neke supstance i kako se ona menja sa vremenom. Polazna jednačina je Fikova jednačina za difuziju,

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K \frac{\partial \chi}{\partial x} \right] \quad (3.84)$$

gde je χ koncentracija posmatrane materije (masa po jedinici mase vazduha, ili broj čestica po jedinici mase vazduha itd.). Fikova jednačina važi tačno za molekularnu difuziju; međutim, kod turbulentne difuzije ona zapada u ozbiljne teškoće. Naročito je neprijatno što se pri primeni Fikove formule na procese različitih razmera moraju uzimati sasvim različite vrednosti koeficijenta difuzije K , otprilike to veće što su veće razmere procesa koji se posmatra ukoliko se želi dobiti slaganje merenja i računa. Šta više, ako se posmatra proces koji tokom vremena menja svoje razmere, npr. difuzija nekog oblaka materije koji je u početku mali a kasnije veći i veći, za dobre rezultate pokazalo se da bi trebalo uzeti

da je K funkcija i vremena i prostornih koordinata, npr. odstojanje od izvora materije. Iz Prantlove teorije ³ znamo da je pri tlu K funkcija odstojanja od tla, ali je sasvim neprihvatljivo uzeti da neka fizička konstanta zavisi od vremena, a naročito od horizontalnog rastojanja do proizvoljnog početka. (Vidi npr. Sutton 1962, str 146). Statistički pristup donosi ovde nove mogućnosti. Tu se lako vidi da treba razlikovati dve vrste difuzije: difuziju iz nepokretnog stalnog izvora i relativnu difuziju oblaka materije ili grupe čestica, u odnosu na njihovo težište. Za problem difuzije iz nepokretnog izvora osnovu teorije predstavlja Tejlorova teorema.

3.7.1 Tejlorova teorema

Osnovni parametar koji opisuje difuziju iz nepokretnog izvora je srednje kvadratno odstupanje definisano kao:

$$D = \overline{(x_{sr} - x_i)^2}, \quad (3.85)$$

ili ako se uzme da je izvor u koordinatnom početku i da nema srednjeg vetra, tako da je $x_{sr} = 0$, srednje kvadratno odstupanje postaje :

$$D = \overline{(x_i)^2} \quad (3.86)$$

Tada se kao brzina "širenja" supstance može uvesti veličina S :

$$S = \frac{d}{dt} \overline{x_i^2} = 2 \overline{x_i \frac{dx_i}{dt}} = 2u(t_0) dt_0 \int_0^{t_0} u(\zeta) d\zeta \quad (3.87)$$

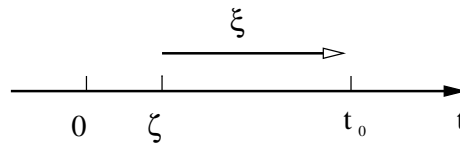
gde je ζ vreme proteklo od trenutka početka ispuštanja supstance. Nas obično zanima vreme proteklo od sadašnjeg trenutka, koje ćemo obeležiti sa ξ i tada važi:

$$\xi = t_0 - \zeta \Rightarrow d\xi = -d\zeta; \quad \zeta = 0 \Rightarrow \xi = t_0; \quad \zeta = t_0 \Rightarrow \xi = 0 \quad (3.88)$$

što daje:

$$S = 2u(t_0) dt_0 \int_0^{t_0} u(t - \xi) d\xi = 2 \int_0^{t_0} \overline{u(t_0) u(t - \xi)} d\xi \quad (3.89)$$

³ona će biti izložena u narednoj glavi



Slika 3.11: Veza izmedju proteklog vremena ζ i vremena ξ u odnosu na trenutak t_0 (sadašnji trenutak)

Ako želimo da S napišemo preko autokorelacione funkcije:

$$R(\xi) = \frac{\overline{u(t_0 - \xi)u(t_0)}}{\overline{u(t_0)^2}} \quad (3.90)$$

dobijamo:

$$S = 2\overline{u(t_0)^2} \int_0^{t_0} R(\xi) d\xi \quad (3.91)$$

a sama $\overline{x_i^2}$ postaje

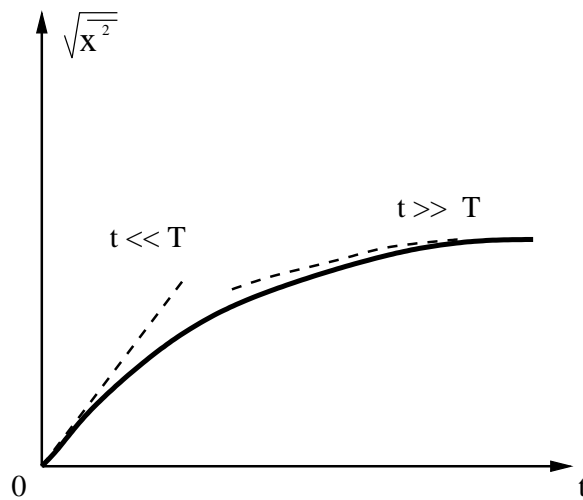
$$\overline{x_i^2} = 2\overline{u(t_0)^2} \int_0^{t_0} dt \int_0^t R(\xi) d\xi \quad (3.92)$$

Ova formula predstavlja sadržaj *Tejlorove teoreme*, Tejlor (26). Od interesa je kako se menja dimenzija oblaka definisna sa $[\overline{x_i^2}]^{1/2}$ za malo i veliko t . Ako je tek počela difuzija tada je vrednost autokorelacione funkcije bliska jedinici pa se dobija:

$$\sqrt{\overline{x^2}} \approx \sqrt{\overline{u^2}} \cdot t \approx t \quad (3.93)$$

Dakle dužinski razmer oblaka raste linearno sa vremenom. Druga asimptotska vrednost je za vrlo veliko t . Tada, zbog (3.3) važi

$$\sqrt{\overline{x^2}} \approx \sqrt{\overline{u^2 T t}} \approx \sqrt{t} \quad (3.94)$$



Slika 3.12: $[\overline{x_i^2}]^{1/2}$ kao funkcija vremena, puna linija. Asimptote za malo i veliko t , isprekidane linije.

Dakle nakon dovoljno dugog vremena ($t \gg T$) brzina širenja oblaka se smanjuje i to značajno u poređenju sa prethodnim slučajem. Razlog promene brzine povećavanja je postojanje turbulentnih elemenata različitih razmera. Iz ranijih izlaganja smo videli da je najefikasnija interakcija turbulentnih elemenata kada su sličnih razmera. Isto važi i za turbulentnu difuziju. Najefikasnije difuziju (razmazivanje) vrše oni turbulentni elementi koji imaju razmere reda veličine razmera oblaka. Kako sa vremenom oblak raste, to i brzina difuzije raste jer sve veći i veći elementi je vrše, a prema spektru \mathbf{tke} sa porastom razmera raste i brzina turbulentnih elemenata. Kada razmer difundujuće materije postane mnogo veći od elemenata kojih ima najviše, i koji najviše doprinose difuziji, tada brzina difuzije postaje konstantna. Iz ovih razmatranja vidimo da postoji potreba da se u analizu turbulentne difuzije, uvedu razmere procesa. Jedna od mogućnosti je data u Ričardsonovoj teoriji turbulentne difuzije koja se zasniva na konceptu funkcije odstojanja suseda.

3.7.2 Ričardsonova teorija

Ričardson je uveo veličinu definisanu:

$$q(l, t) = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x, t) \cdot \chi(x + l, t) dx, \quad (3.95)$$

gde je N ukupan broj posmatranih čestica, a χ koncentracija, tj. broj čestica po jedinici dužine. Funkciju q je nazvao "funkcija odstojanja suseda" jer :

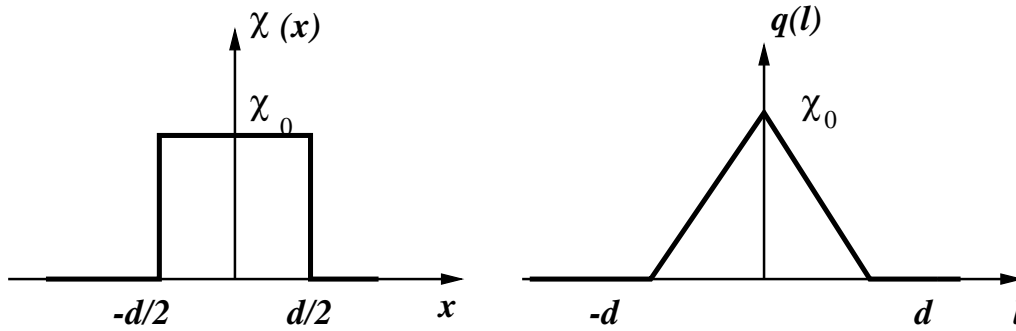
- $\chi(x)dx$ je broj čestica na intervalu dx
- $\chi(x+l)/N$ je taj broj čestica izražen kao deo ukupnog broja čestica N ,
- $\chi(x)\chi(x+l)dx/N$ je taj deo čestica pomnožen sa koncentracijom na odstojanju l , tj. brojem suseda po jedinici dužine na odstojanju l .

Zbir takvih proizvoda za sve elemente dx , tj. funkcija $q(l, t)$ je znači prosečan broj suseda po jedinici dužine na odstojanju l . Na primer posmatramo čestice sa ravnomernom koncentracijom na ograničenom delu x -ose, dužine d , slika (3.13 (a)). Kada je l jednako nuli, funkcija $q(l)$ je jednaka koncentraciji unutar posmatrane grupe čestica. Zatim, nema suseda koji su dalje od d , pa je funkcija q jednaka nuli za $|l| > d$. Na osnovu definicije funkcije odstojanja suseda može se pokazati da je $q(l)$ parna funkcija pa je dovoljno odrediti $q(l)$ za $l > 0$. Prema pretpostavljenoj raspodeli $\chi(x)$ može se uočiti da proizvod $\chi(x)\chi(x+l)$ ima vrednost:

$$\chi(x)\chi(x+l) = \begin{cases} 0 & \text{za } x \in (-\infty, a) \\ \chi_0^2 & \text{za } x \in (a, a+d-l) \\ 0 & \text{za } x \in (a+d-l, \infty) \end{cases} \quad (3.96)$$

Zamenom u definicionu relaciju za $q(l)$ dobija se grafik (b) na slici (3.14). Iz definicije funkcije q vidimo da se ona može koristiti za opis difuzije grupe čestica. Kada se posmatrana grupa čestica rasprostire duž x ose, na odgovarajući način će se menjati krive i $\chi(x)$ i $q(l)$. Površina ispod krive $\chi(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi(x, t) dx = N \quad (3.97)$$



Slika 3.13: Jedan primer odnosa funkcije gustine $\chi(x)$, (a) i njene funkcije odstojanja suseda $q(l)$, (b).

mora pri tome ostati konstantna, jer se ukupan broj čestica ne menja. Isto tako i površina ispod krive $q(l)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(l,t) dl = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\chi(x,t)\chi(x+l,t) dx] dl = N \quad (3.98)$$

takodje se tokom vremena ne menja, tj.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} q(l,t) dl = 0. \quad (3.99)$$

Štaviše, prema relacijama (3.97) i (3.98), površine ispod dve krive moraju uvek biti jednake. Ovo je očigledno i kod primera sa slike (3.13:a,b). Ukoliko bi difuzija bila Fikova, rasprostiranje krive $\chi(x)$ tokom vremena bi bilo određeno diferencijalnom jednačinom (3.84). Možemo očekivati izvesne prednosti pri korišćenju krive $q(l)$ za opis procesa difuzije, jer je kod nje za nezavisno promenljivu uzeto odstojanje l , koje definiše prostorne razmere procesa i ne zavisi od proizvoljnog koordinatnog početka. Postavlja se zato pitanje da li se može dobiti diferencijalna jednačina koja određuje promenu krive $q(l)$ sa vremenom. Postupak koji sledi je postupak "pravljenja" jednačine, a ne niz identičnih transformacija koje polaze od neke osnovne relacije. Podjimo od definicije funkcije $q(l)$ i napišimo $\partial q(l)/\partial t$:

$$\frac{\partial}{\partial t} q(l,t) = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} (\chi \cdot \chi_l) dx = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left(\chi_l \frac{\partial}{\partial t} \chi + \chi \frac{\partial}{\partial t} \chi_l \right) dx \quad (3.100)$$

za molekulsku difuziju, prema Fikovoj formuli:

$$\frac{\partial}{\partial t}\chi = K \frac{\partial^2}{\partial x^2}\chi. \quad (3.101)$$

Ako umesto promenljive x uvedemo l kao promenljivu imamo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\chi_l = K \frac{\partial^2}{\partial l^2}\chi_l \quad (3.102)$$

Kada ove relacije zamenimo u relaciju (3.100) dobijamo:

$$\frac{\partial}{\partial t}q(l,t) = \frac{K}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left(\chi_l \frac{\partial^2}{\partial x^2}\chi + \chi \frac{\partial^2}{\partial l^2}\chi_l \right) dx. \quad (3.103)$$

A kako je:

$$\chi_l \frac{\partial^2}{\partial x^2}\chi + \chi \frac{\partial^2}{\partial l^2}\chi_l = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\chi\chi_l) - 2\frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{\partial\chi_l}{\partial l} - 2\chi\frac{\partial^2}{\partial l^2}\chi_l + 2\chi\frac{\partial^2}{\partial l^2}\chi_l \quad (3.104)$$

i kako je

$$-2\frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{\partial\chi_l}{\partial l} - 2\chi\frac{\partial^2}{\partial l^2}\chi_l = \frac{\partial^2}{\partial l\partial x}(\chi\chi_l) \quad (3.105)$$

ili

$$2\chi\frac{\partial^2}{\partial l^2}\chi_l = 2\frac{\partial^2}{\partial l^2}(\chi\chi_l) \quad (3.106)$$

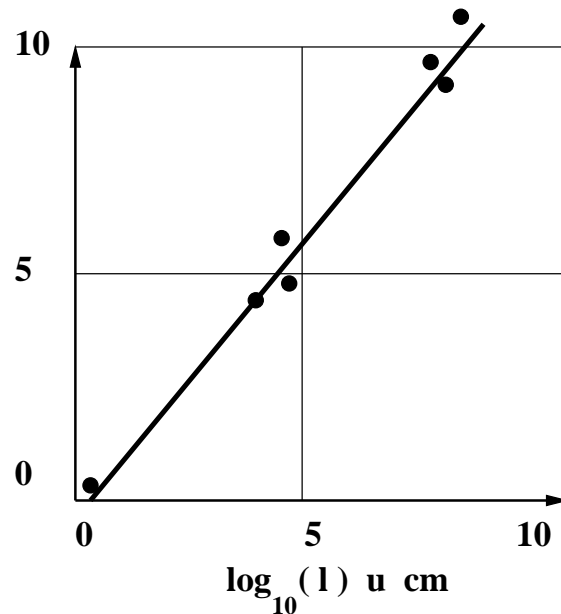
to konačno dobijamo jednačinu za $q(l)$

$$\frac{\partial}{\partial t}q(l,t) = 2K \frac{\partial^2}{\partial l^2}q(l,t) \quad (3.107)$$

Dakle u specijalnom slučaju kada je u pitanju molekulska difuzija ($K = const.$), funkcija $q(l,t)$ mora da se ponaša u skladu sa jednačinom (3.84). *Uopštimo* sada tu jednačinu:

$$\frac{\partial}{\partial t}q(l,t) = \frac{\partial}{\partial l} \left[F(l) \frac{\partial}{\partial l}q(l,t) \right]. \quad (3.108)$$

Da bi procenio zavisnost $F(l)$ od l , Ričardson je iskoristio raspoložive podatke o difuziji za različite prostorne razmere. Počev od molekularnih, zatim tri vrednosti dobijene iz osmatranja profila vetra anemometrima i pilot balonima, zatim analiziranjem putanja većih balona, brzine širenja vulkanskog pepela i najzad difuzija koda kretanja koja su planetarnih razmera gde su turbulentni elementi bili cikloni. Svi ovi podaci su prikazani na slici (3.14) gde je apscisa $\log_{10}(l)$ u cm, a ordinata $\log_{10}(K)$ u cm^2s^{-1} . Ričardson je predočio da se prava



Slika 3.14: Ričardsonov dijagram koeficijenta difuzije za razne prostorne razmere.

$$K(l) = .2l^{4/3} \quad (3.109)$$

uneta na prikazanom dijagramu slaže sa osmatranjima gotovo dobro u čitavoj oblasti između metra i 10 km. Relacija (3.14) se danas često naziva Ričardsonov četvortrećinski zakon. Izvanredno je zanimljivo da se, kako je petnaest godina kasnije pokazao Obuhov (20), eksponent $4/3$ u relaciji (3.96) može dobiti

na osnovu Kolmogorovljeve teorije sličnosti. Naime, ako pretpostavimo da $F(l)$ ima oblik:

$$F(l) = A \cdot l^m \quad (3.110)$$

onda pošto profil $F(l)$ ima dimenzije $L^2 T^{-1}$, konstanta A mora da ima dimenzije $L^{2-m} T^{-1}$. Unutar ravnotežne oblasti A treba da bude funkcija samo od v i ϵ . Pošto je:

$$[v] = L^2 T^{-1} \quad , \quad [\epsilon] = L^2 T^{-3} \quad (3.111)$$

sledi:

$$(L) = v^{3/4} \epsilon^{-1/4} \quad , \quad (T) = v^{1/4} \epsilon^{-1/2}. \quad (3.112)$$

Zamenom dimenzija za A zaključujemo da u ravnotežnoj oblasti A treba da bude određeno sa:

$$A = const. \cdot v^{1-\frac{3m}{4}} \cdot \epsilon^{\frac{m}{4}} \quad (3.113)$$

Prema argumentaciji koja je vezložena u prethodnim odeljcima u inercijalnoj podoblasti difuzija ne sme da zavisi od v . Da bi se to ostvarilo, eksponent m mora da ima vrednost upravo $4/3$, istu vrednost koju je predložio Ričardson na osnovu empirijskih podataka. Treba obratiti pažnju da je $4/3$ procena jer sa grafika se moglo zaključiti da je nagib (njegov tangens) 1.3 ili 1.4 ali da je predložen količnik dva **cela** broja govori o njegovoj fizičkoj intuiciji. Treba, na kraju, istaći da je ovo slaganje u izvesnoj meri slučajno, jer analiza, uz korišćenje obe hipoteze sličnosti, strogo važi samo kada se difuzija događa usled turbulentnih elemenata razmera unutar inercijalne podoblasti. To, svakako, nije slučaj za sve procese koji su prikazani na Ričardsonovom dijagramu.

Teorije zatvaranja

4.1 Empirijske teorije zatvaranja

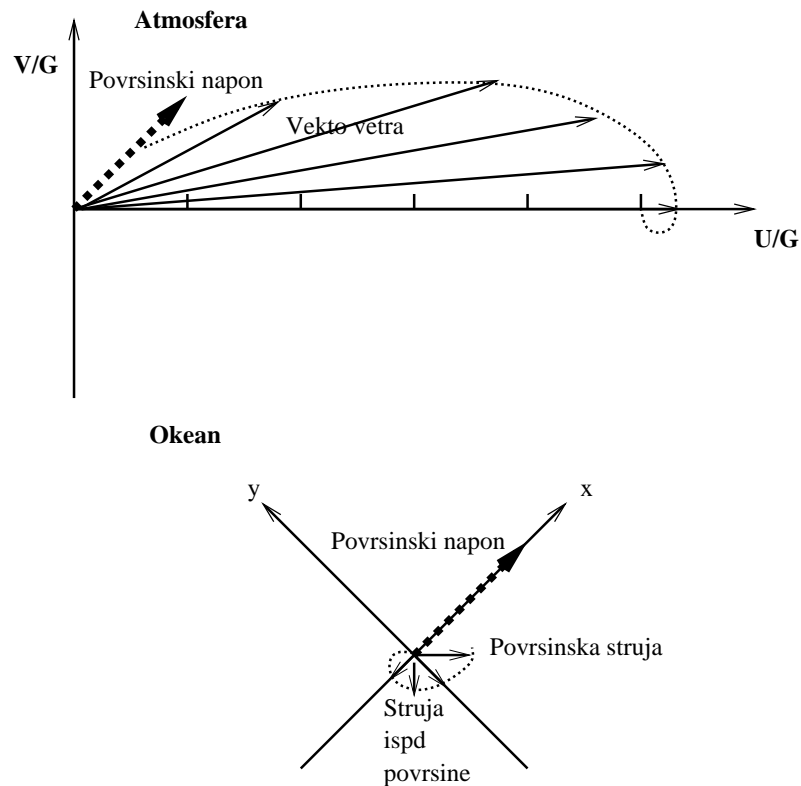
Još u uvodnom delu smo videli da zbog nelinearnosti jednačina kretanja, pri razlaganju trenutnih vrednosti na srednje vrednosti i fluktuacije, dolazi do problema zatvaranja. Kako zatvoriti sistem jednačina koji opisuje turbulentno kretanje je i danas otvoren problem iako postoje brojni pokušaji kako teorijske tako i praktične prirode da se problem razreši. Naravno osnovni razlog dosadašnjeg ,relativnog, neuspeha leži u nedovoljnom poznavanju nastanka i prave prirode turbulentnog kretanja. U našem izlaganju mi ćemo prikazati najkarakterističnije pristupe držeći se uglavnom istorijskog redosleda njihovog nastanka.

4.1.1 Hipoteza koeficijenta razmene

Prvi i najdirektniji način da se reši problem zatvaranja se zove hipoteza koeficijenta razmene. Po toj hipotezi na primer, za fluks količine kretanja (x-komponente) važi:

$$-\overline{uw} = K_m \frac{\partial U}{\partial z} \quad (4.1)$$

Analogija sa molekulskim prenosom količine kretanja je očigledna, gde umesto molekulskog koeficijenta difuzije količine kretanja ν , uvodimo koeficijent turbulentne difuzije K_m . Naravno treba još dati njegovu brojnu vrednost. Kako kod turbulentnih tokova prenos količine kretanja vrše makroskopski elementi



Slika 4.1: Shematski prikaz hodografa vetra po Ekmanovoj spirali za a) atmosferu i b) za okean. Sa G je obeležen intenzitet geostrofskog vetra pri čemu se njegov pravac poklapa sa pravcem x - ose. Kako se spuštamo nadole vetar skreće ulevo da bi pri tlu zauzeo pravac naznačen debljom isprekidanom strelom. Intenzitet vetra eksponencijalno opada sa visinom, a karakteristična dužinska razmera je $[f/2K_m]^{1/2}$, (prema Busingeru (2)).

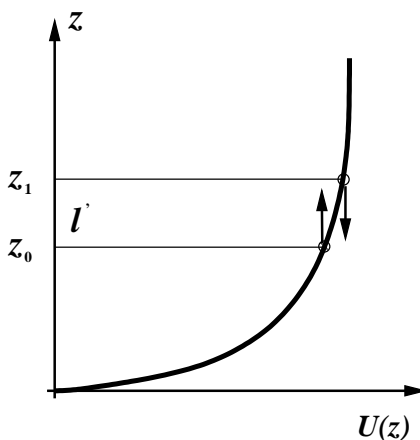
to i vrednost efektivnog koeficijenta razmene treba da bude mnogo veća od molekuskog koeficijenta razmene. Prilikom biranja vrednosti za K_m uzimaju se u obzir i karakteristike modela, čiji jedan deo čini račun vezan za turbulenciju. Rezolucija modela ili potreba za disipacijom na najmanjim razmerama najčešće i određuju vrednost za K_m . Kako su ove veličine od modela do modela različite i vrednost za K_m nije uvek ista. Tako se sreću vrednosti od 10^5 do 10^8 SI jedinica. Kada se porede profili vetra računati uz pretpostavku da je $K_m = \text{const.}$ sa osmotrenim, pri skoro neutralnoj stratifikaciji, postoji kvalitativno slaganje. Model predviđa Ekmanovu spiralu, vidi sliku (4.1), tj. eksponencijalni porast amplitude vetra i skretanje sa visinom po sinusnom zakonu. Kod osmotrenih profila, u blizini vrha PGS-a, takodje je uočeno skretanje vetra sa visinom, ali ne i eksponencijalna promena amplitude.

Zbog neslaganja između osmatranja i rezultata za $K_m = \text{const.}$, naročito u nižim slojevima, čak i u tako ograničenom broju slučajeva približno neutralne stratifikacije, ovakav pristup problemu zatvaranja se retko koristi. On se najčešće koristio kod dugotrajnih integracija kakve se sreću u radu sa klimatskim ili okeanskim modelima, jer je ugradjivanje nekih komplikovanijih postupaka limitirano raspoloživim računskim vremenom. Međutim, sa takoreći eksplozivnim razvojem računara prestaje potreba za ovako jednostavnim pristupom problemu zatvaranja.

4.1.2 Teorija puta mešanja, Prantlova teorija

Prantl je 1925, zasnovao teoriju kako se mogu izračunati fluksevi količine kretanja kod toka fluida preko ravne ploče. Da bi to uspeo on je pošao od veoma uprošćene slike problema. Neka je profil vetra kao na slici (4.2). Tada ako dodje do pomeranja delića sa nivoa z_0 , na nivo z' koji su na međusobnom rastojanju l' , i ako pri tom delić čuva svoju količinu kretanja tj. brzinu, on će predstavljati poremećaj za svoju novu okolinu u smislu da će se njegova brzina razlikovati od brzine okolnog fluida. Ovo je naravno jako uprošćena slika turbulentnog polja i razloga postojanja turbulentnih elemenata (fluktuacija). Naglasimo još jednom koje su pretpostavke učinjene do sada. Prvo, pretpostavlja se da postoji vertikalno kretanje delića. Zatim da delići na putu l' ne interaguju tj. ne gube ništa od početne količine kretanja. Ove dve pretpostavke čine sadržaj prve Prantlove hipoteze. Na osnovu ove hipoteze, Prantl zatim izračunava veličinu poremećenja kao:

$$u = U(z_1) - U(z_0) = l' \frac{\partial U}{\partial z} \quad (4.2)$$



Slika 4.2: Ilustracija uz Prantlovu teoriju

Ovim je učinjena još jedna pretpostavka. Zanemareni su članovi višeg reda, iako je dužina predjenog puta l' konačna veličina. Strogo uzevši ovo je opravdano samo ako je ispunjen uslov:

$$l' \frac{|\partial^2 U / \partial z^2|}{|\partial U / \partial z|} \ll 1 \quad (4.3)$$

što nije ispunjeno za proizvoljan profil $U(z)$ pa čak ni za profile brzine u blizini zida. Ipak teorija zadržava relaciju (4.3). Konačno, Prantl pretpostavlja da je fluktuacija vertikalne brzine srazmerna fluktuaciji horizontalne brzine. Ovo se opet može uzeti kao hipoteza. Dakle:

$$w \approx u = l \frac{\partial U}{\partial z} \quad (4.4)$$

pa je

$$\overline{uw} = C' \cdot \overline{l^2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 = C' \cdot l^2 \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \quad (4.5)$$

gde je C' konstanta, a $\overline{l^2} \equiv l^2$ je tzv. Prantlova *dužina puta mešanja* takodje pozitivna veličina. Ovoj relaciji možemo dati precizniji oblik. Ako su granice domena čvrste tada u blizini te granice (zida) uvek

mora biti $\partial_z U > 0$ jer brzina u blizini zida mora biti mala a na samom zidu nula. Dalje od zida brzina raste i van graničnog sloja postaje konstantna određena silom gradijenta pritiska kako smo to već analizirali na početku druge glave. Da bi se brzina smanjivala, i to više što smo bliže zidu, mora fluks količine kretanja da bude usmeren ka zidu. Iz ovakve analize mi vidimo da blizu zida uvek mora biti ispunjen uslov $\overline{uw} < 0$. Uz uslov da je C pozitivan broj, fluksevi količine kretanja i gradijenta srednjeg vetra imaće uvek suprotan znak ako realciju (4.5) napišemo kao:

$$\overline{uw} = -C \cdot l^2 \left| \frac{\partial U}{\partial z} \right| \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (4.6)$$

Napomenimo da se forma da je fluks količine kretanja srazmeran gradijentu srednje brzine:

$$\overline{uw} = -K_m \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (4.7)$$

i dalje održala, ali je mnogo važnije da ovako definisan koeficijent mešanja uključuje karakteristike srednjeg profila brzine, njeno smicanje, a kroz promenu l -a sa visinom bar potencijalno se može uzeti u obzir da turbulentni elementi rastu sa rastojanjem od tla kao i geometrija problema tj. položaj čvrste granice. To je veliki korak napred sa teorijskog stanovišta ali za praktične primene još je preostao veliki problem, jer nije jasno kako u svakom posebnom slučaju odrediti $l(z)$ ili u nekoj još komplikovanijoj geometriji $l(x, y, z)$.

Najveći uspeh je ova teorija postigla za tok fluida preko ravne ploče. U tom slučaju, ako se uzme da je $l = kz$ za stacionaran tok, dobija se logaritamski profil vetra. Zaista, jednačine kretanja se svode na:

$$0 = \frac{\partial \overline{uw}}{\partial z} \Rightarrow \overline{uw} = const. \quad (4.8)$$

a prema Prantlovoj teoriji:

$$-C \cdot l^2 \left| \frac{\partial U}{\partial z} \right| \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) = const. \quad (4.9)$$

tj.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) = \frac{const}{z} \quad (4.10)$$

što nakon integracije daje

$$U(z) = \text{const} \cdot \log(z) + C_1 \quad (4.11)$$

Interesantno je da je Von Karman dobio isti rezultat, logaritamski profil, tako što je tražio zakon sličnosti za $l(z)$ uz pretpostavku da je $l = l(\partial_z U, \partial_{zz} U)$. Tada prema dimenzijama l -a važi da je $l = k \partial_z U / \partial_{zz} U$. Time relacija (4.6) postaje diferencijalna jednačina koja opet u slučaju toka fluida preko ravne ploče u oblasti zakona zida tj. gde je turbulentni fluks konstantan, za rešenje ima logaritamski profil.

Iako se Prantlovoj teoriji mogu staviti dve ozbiljne primedbe:

- nema mešanja na putu koji delić prelazi, a zatim na kraju puta dolazi do potpunog mešanja,
- put mešanja l je konačan iako se u izvodjenju pretpostavlja da je vrlo mala veličina,

ona se zasniva na jasnim fizičkim pretpostavkama i što je važnije kod postupka modeliranja u slučaju toka fluida preko ravne ploče daje odlične rezultate.

4.2 Teorije zatvaranja višeg reda

U prethodnom odeljku, empirijske teorije zatvaranja, prikazani su prvi pokušaji kompletiranja jednačina kretanja za turbulentne tokove. Sa razvojem računara otvorena je mogućnost korišćenja komplikovanih sistema jednačina pa je učinjen pokušaj da se problem reši na taj način da se formiraju prognostičke jednačine za Reynoldsove napone, flukseve toplote, kao i za varijansu potencijalne temperature. Pošto se formiraju jednačine za kvadratne članove takav se sistem naziva sistemom drugog reda. Ponekad se ne zadovoljavamo ni sa tim nego se formiraju jednačine za trostruke korelacije pa takve sisteme nazivamo sistemi trećeg reda.

4.2.1 Zatvaranje drugog reda

Jednačine za Reynoldsove napone, flukseve toplote i varijansu temperature izvedene su u Dodatku D. Tako potpun sistem jednačina drugog reda je:

za količinu kretanja:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i u_j} \\
& + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(U_k \overline{u_i u_j} + \overline{u_i u_j} u_k - v \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{p u_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{p u_i} + f_k (\epsilon_{jkl} \overline{u_l u_i} + \epsilon_{ikl} \overline{u_l u_j}) \\
& = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \beta (g_j \overline{u_i \theta} + g_i \overline{u_j \theta}) \\
& + p \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - 2v \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

za flukseve toplote,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i \theta} \\
& + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(U_k \overline{u_i \theta} + \overline{\theta u_i} u_k - \alpha u_i \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} - v \theta \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{p \theta} + f_k \epsilon_{ikl} \overline{u_l \theta} \\
& = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} - \overline{\theta u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \beta g_i \overline{\theta^2} + p \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_i} - (\alpha + v) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

i za varijansu temperature

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\theta^2} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(U_k \overline{\theta^2} + \overline{u_k \theta^2} - \alpha \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_k} \right) = -2\overline{u_k \theta} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} - 2\alpha \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k}. \tag{4.14}$$

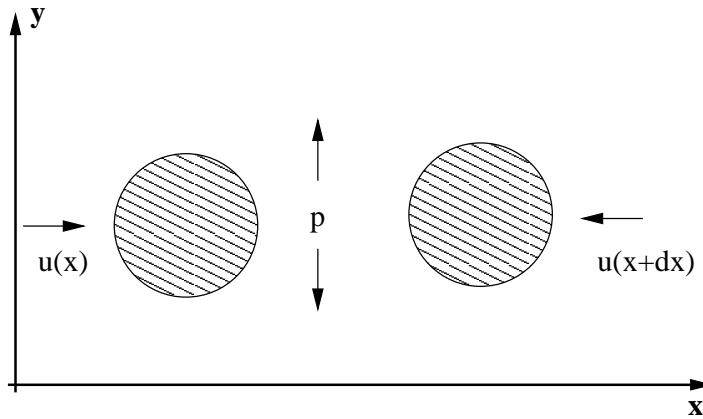
Naravno, osnovni problem je da sistem nije zatvoren. Ali, ideja je da se veličine koje se pojave u postupku formiranja novih jednačina, a to su višestruke korelacije kao i ostali nepoznati članovi mogu izraziti uspješnije preko gradijenata srednjih veličina i/ili preko srednjih vrednosti kvadratnih veličina. U tabeli (4.1) su eksplicitno navedeni članovi koje treba izraziti (parametrizovati). Navedene veličine su tenzori raznih redova. Osnovni stav koji će se koristiti i (Melor ((14))) prilikom zatvaranja je da su veze linearne, a konstitutivni koeficijenti u tim vezama izotropni tenzori. Pored ovog opšteg stava u svakom pojedinačnom slučaju imaće se u vidu i fizička suština tog člana, pre svega dimenzije kao i stepen simetričnosti člana koji se analizira.

grupa A:		grupa C:	
$p \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$?	$\overline{u_i u_j u_k}$?
$p \frac{\partial \theta}{\partial x_j}$?	$\overline{\theta u_i u_k}$?
		$\overline{\theta^2 u_k}$?
grupa B:		grupa D:	
$2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}$?	$\overline{p u_j}$?
$(\alpha + \nu) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k}$?	$\overline{p \theta}$?
$(2\alpha) \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k}$?		

Tabela 4.1: Tabela po grupama prema vrsti članova koji postoje kod jednačina drugog reda a koje treba izraziti preko ostalih članova sistema

Počecemo od prvog člana iz grupe **A**. Fizičku osnovu za parametrizaciju ovog (i ostalih članova iz grupe **A**) dali su Rota (23) i Melor (14). Izuzev u blizini jako izraženih nehomogenosti, kao u blizini tla ili u okolini snažnih gradjenata vetra ili temperature, empirijska je činjenica da su turbulentna polja u visokoj meri izotropna. Član koji je odgovoran za "izotropizaciju" je korelacija pritiska i gradijenta brzine. Da je to tačno pokušaćemo da pokažemo sledećom argumentacijom. Uočimo prvo da ovaj član nije prisutan u jednačini za **tke**. Drugo pretpostavimo da je u jednom momentu realizovan ekstremni slučaj kada postoji fluktuacija brzine samo u jednom pravcu tj. $u \neq 0$ a $v = w = 0$. Kako uvek postoje nehomogenosti u svim poljima pa i u polju brzine, postoje turbulentni elementi koji se približavaju jedan drugom, što je shematski prikazano na slici (4.3). Približavanjem turbulentnih elemenata, prema jednačini kontinuiteta, dolazi do istiskivanja fluida u pravcu y i z ose, dakle generišu se v i w komponente brzine. Ovim se smanjuje početna neizotropnost, jer od situacije u kojoj su \overline{uv} i \overline{uw} bili nula, jer su $v = 0$ i $w = 0$, sada su različiti od nule. Na sličan način gradijenti u polju srednjih brzina dovode do približavanja turbulentnih elemenata. Dalje, imajući na umu pretpostavku o linearnosti veza sledi:

$$\overline{p \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} = C_{ijkm} \overline{u_k u_m} + C'_{ijkm} \frac{\partial U_m}{\partial x_k} \quad (4.15)$$



Slika 4.3: Ilustracija kako član $\overline{p(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)}$ doprinosi redistribuciji količine kretanja

Kako su konstitutivni koeficijenti C_{ijklm} i C'_{ijklm} , po pretpostavci, izotropni tenzori to mora da važi:

$$C_{ijklm} = C_1 \delta_{ij} \delta_{km} + C_2 \delta_{ik} \delta_{jm} + C_3 \delta_{im} \delta_{kj}. \quad (4.16)$$

Zamenom u (4.16) za prvi izraz na desnoj strani dobijamo:

$$C_{ijklm} \overline{u_k u_m} = (C_1 \delta_{ij} \delta_{km} + C_2 \delta_{ik} \delta_{jm} + C_3 \delta_{im} \delta_{kj}) \overline{u_k u_m} = C_1 \delta_{ij} \overline{u_k u_k} + (C_2 + C_3) \overline{u_i u_j}. \quad (4.17)$$

Dalje, ako se izvrši kontrakcija indeksa važi:

$$\overline{p \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{1}{3} (C_2 + C_3) \quad (4.18)$$

Time se broj nepoznatih konstanti svodi na jednu, dimenzionu konstantu C_1 . Njene dimenzije su $[C_1] = T^{-1}$ pa možemo da je predstavimo kao odnos razmera brzine i dužine, $[C_1] = q/l_1$. Za razmer brzine prirodno je uzeti q gde je $q^2 = \overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}$, dvostruka **tke**, a koja je jedna od prognoziranih veličina. Analogno se može dobiti:

$$C_{ijlm} \frac{\partial U_m}{\partial x_l} = C \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.19)$$

a prema dimenzijama $[C] = C_0 q^2$ gde je C_0 , bezdimenziona konstanta. Tako je konačno:

$$p \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} = -\frac{q}{3l_1} \left(\frac{1}{3} \overline{u_i u_j} - \delta_{ij} q^2 \right) + C_0 q^2 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.20)$$

Time je parametrizacija ovog člana svedena na problem jedne dužine l_1 i jedne apsolutne konstante C_0 . Sledeći član iz tabele, iz iste grupe A, tretiraćemo analogno prethodnom članu. Prema prethodnom postupku, za $\overline{p \partial \theta / \partial x_j}$ treba da važi:

$$p \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = C_{jk} \overline{u_k \theta} + C_{ijklm} \frac{\partial U_k}{\partial x_m} \quad (4.21)$$

I opet analogno prethodnom izlaganju može se pokazati da važi:

$$p \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = C_{jk} \overline{u_k \theta} = C \delta_{jk} \overline{u_k \theta} = C \overline{u_j \theta} \quad (4.22)$$

Kako C ima dimenziju T^{-1} , konačno možemo da pišemo:

$$p \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = -\frac{q}{3l_2} \overline{u_j \theta}. \quad (4.23)$$

Članovi koji se javljaju u grupi **B** odgovorni su za disipaciju. Prema Kolmogorovljevoj (Kolmogorov (12)) teoriji disipaciju vrše najmanji turbulentni elementi koji su izotropni. Tako kod članova disipacije postoji dodatni uslov da su oni sami izotropni tenzori, odmah, pišemo:

$$2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} = C \delta_{ij} = \frac{2q^3}{3\Lambda_1} \delta_{ij} \quad (4.24)$$

Sledeći član iz grupe B, $(\alpha + \nu) \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k}}$ je vektor ili tenzor prvog reda. Ali kako ne postoji izotropni tenzor prvog reda to se uzima:

$$(\alpha + \nu) \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k}} = 0 \quad (4.25)$$

Poslednji član iz ove grupe disipativnih članova, disipacija temperature, se tretira potpuno analogno disipaciji kinetičke energije pa možemo odmah da pišemo:

$$(2\alpha) \overline{\frac{\partial \theta}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k}} = C \overline{\theta^2} = 2 \frac{q}{\Lambda_2} \overline{\theta^2} \quad (4.26)$$

Članovi grupisani u okviru grupe **C** su trostruke korelacije koje možemo da shvatimo kao srednje flukseve odgovarajućih dvostrukih proizvoda; $\overline{u_i u_j u_k} = u_i \overline{(u_j u_k)}$ i zatim da pretpostavimo veze između flukseva proizvoda i srednjih vrednosti tih proizvoda. Dakle:

$$\overline{u_i (u_j u_k)} = C_{ijklmn} \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{u_m u_n} \quad (4.27)$$

Ponovo opšti zahtev za izotropnošću tenzora C_{ijklmn} znači:

$$C_{ijklmn} = C_1 \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + C_2 \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + C_3 \delta_{im} \delta_{lj} \delta_{lk} + \dots \quad (4.28)$$

Ali pored opšteg zahteva za izotropnošću tenzora C_{ijklmn} mora se voditi računa da je član $\overline{u_i u_j u_k}$ simetričan tenzor po svim indeksima. Tu osobinu mora da poseduje i izraz koji ga zamenjuje. Tako direktno sledi:

$$\overline{u_i u_j u_k} = C \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_k u_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_k} \right) \quad (4.29)$$

a prema dimenzijama za C sledi:

$$\overline{u_i u_j u_k} = -q\lambda_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_k u_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_k} \right) \quad (4.30)$$

Član $\overline{u_i u_j \theta}$ možemo smatrati srednjim fluksom veličine $\overline{u_j \theta}$ pa je i parametrizacija slična prethodnoj:

$$\overline{u_i u_j \theta} = -q\lambda_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_j \theta} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i \theta} \right) \quad (4.31)$$

I na kraju $\overline{u_k \theta^2}$ možemo smatrati fluksom kvadrata fluktuacije potencijalne temperature, $\overline{\theta^2}$ pa se dobija:

$$\overline{u_k \theta^2} = -q\lambda_3 \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{\theta^2} \quad (4.32)$$

Još je preostala grupa članova **D**. Nekih preciznih podataka iz merenja nema, sem opštih indikacija da su mali pa se u okviru ove parametrizacije zanemaruju.

Time je problem zatvaranja sveden na određivanje vrednosti uvedenih dužinskih razmera, l_1 , l_2 , λ_1 , λ_2 , λ_3 , Λ_1 , Λ_2 i odgovarajućih konstanti. Prvi korak je pretpostavka da su svi dužinski razmeri proporcionalni *jednom* dužinskom razmeru, glavnom razmeru, l :

$$\begin{aligned} l_1 &= A_1 l & \Lambda_1 &= B_1 l & \lambda_1 &= C_1 l \\ l_2 &= A_2 l & \Lambda_2 &= B_2 l & \lambda_2 &= C_2 l & \lambda_3 &= C_3 l \end{aligned} \quad (4.33)$$

Vrednosti uvedenih konstanti su dobijene iz raznih laboratorijskih merenja za slučaj **neutralnih** turbulentnih graničnih slojeva. Ovde je važno istaći da iako je određivanje konstanti uradjeno iz podataka za neutralne slučajeve čitava parametrizacija se pokazala uspešnom kada se primenila i na **stratifikovani** fluid. Na kraju treba definisati glavnu dužinu l . U literaturi se sreću brojni predlozi za vrednost l -a. Ovde će biti data jedna od najjednostavnijih verzija koja uzima u obzir postojanje logaritamskog zakona u blizini zida.

$$l(z) = \begin{cases} kz & 0 < z < 0.1\delta \\ l_0 & 0.1\delta < z < \delta \end{cases} \quad (4.34)$$

Najjednostavnije je da se uzme konstantna vrednost, oko 10% planetarnog graničnog sloja tj. $l_0 = 0.1\delta$. Uobičajena vrednost za δ je 1-3 km. Ukoliko želimo da l_0 odrazi neku integralnu meru, recimo turbulentne kinetičke energije u čitavom planetarnom graničnom sloju ili u čitavom domenu gde postoji turbulencija tada možemo l_0 definisati sa:

$$l_0 = \frac{\int_0^\infty q(z) |z| dz}{\int_0^\infty q(z) dz} \quad (4.35)$$

Definisanjem l_0 zaokružen je skup formula kojim se zatvara sistem jednačina.

4.2.2 Razmerna analiza sistema dobijenog zatvaranjem jednačina drugog reda

Jednačine dobijene u prethodnom paragrafu predstavljaju relativno komplikovan sistem sa 10 prognostičkih jednačina. Zato je veoma poželjno da se sistem, na konzistentan način, redukuje. Jedan od načina je metodom razmerene analize. Melor i Jamada (17) su predložili kao osnovnu ideju da su turbulentna polja (vrtlozi) približno izotropna tako da je odstupanje od izotropnosti moguće koristiti kao mali parametar na osnovu koga se može odredjivati relativni odnos članova u jednačinama. Pokazaće se da

postoje tri mogućnosti prilikom poredjenja članova u jednačinama za turbulentne flukseve. Pored ovako formiranih relacija iz istorijskih razloga formira se, u okviru najnižeg reda jo š jedna varijanta pa se zato uvodi 4-ti, 3-ći, 2-gi i 1-vi nivo zatvaranja.

Nivo 4

Nivo 4 čini sistem jednačina za Rejnoldsove napone,

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \overline{u_i u_j} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ q \lambda_1 \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_k u_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_k} \right] \right\} \\ = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \beta (g_j \overline{u_i \theta} + g_i \overline{u_j \theta}) \\ - \frac{2q^3}{3\Lambda_1} \delta_{ij} - \frac{q}{3l_1} (1/3 \overline{u_i u_j} - \delta_{ij} q^2) \\ + C_0 q^2 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (4.36)$$

za varijansu potencijalne temperature,

$$\frac{D}{Dt} \overline{\theta^2} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[q \lambda_3 \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{\theta^2} \right] = -2 \overline{\theta u_k} \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} - 2 \frac{q}{\Lambda_2} \overline{\theta^2} \quad (4.37)$$

i za flukseve toplote

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \overline{u_i \theta} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[q \lambda_3 \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_k \theta} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i \theta} \right) \right] \\ = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} - \overline{\theta u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \beta g_i \overline{\theta^2} - \frac{q}{3l_2} \overline{u_i \theta} \end{aligned} \quad (4.38)$$

koji zadržava sve članove u polaznim jednačinama. Da bi sistematski redukovali članove iz ovog sistema jednačina, razložićemo sve turbulentne flukseve na izotropni i neizotropni deo. Tenzor $\overline{u_i u_j}$ razložen na izotropni deo i ostatak izgleda:

$$\overline{u_i u_j} = \left\| \begin{array}{ccc} \overline{u_1 u_1} & \overline{u_1 u_2} & \overline{u_1 u_3} \\ \overline{u_2 u_1} & \overline{u_2 u_2} & \overline{u_2 u_3} \\ \overline{u_3 u_1} & \overline{u_3 u_2} & \overline{u_3 u_3} \end{array} \right\|$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} q^2/3 & 0 & 0 \\ 0 & q^2/3 & 0 \\ 0 & 0 & q^2/3 \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{ccc} \overline{u_1^2} - q^2/3 & \overline{u_1 u_2} & \overline{u_1 u_3} \\ \overline{u_2 u_1} & \overline{u_2^2} - q^2/3 & \overline{u_2 u_3} \\ \overline{u_3 u_1} & \overline{u_3 u_2} & \overline{u_3^2} - q^2/3 \end{array} \right\| \quad (4.39)$$

Jednačina za izotropni deo je jednačina za **tke**, i kao što smo već ranije videli, nju formiramo kontrakcijom indeksa i i j . Tako dobijamo:

$$\frac{Dq^2}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[q\lambda_1 \left(\frac{\partial q^2}{\partial x_k} + 2 \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_i u_k} \right) \right] = -2\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - 2 \frac{q^3}{\Lambda_1} - 2\beta g_i \overline{u_i \theta} \quad (4.40)$$

Razlika potpunog sistema i jednačine za **tke** daje sistem jednačina koji opisuje neizotropni deo Reynoldsovih napona,

$$\begin{aligned} & \frac{D}{Dt} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{q^2}{3} \delta_{ij} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ q\lambda_1 \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_k u_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_k} - \frac{\delta_{ij}}{3} \left(\frac{\partial q^2}{\partial x_k} + 2 \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{u_l u_k} \right) \right] \right\} \\ & = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{u_l u_k} \frac{\partial U_l}{\partial x_k} - \frac{q}{3l_1} (\overline{u_i u_j} - \delta_{ij} q^2) \\ & + C_0 q^2 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \beta \left(g_j \overline{u_i \theta} + g_i \overline{u_j \theta} - \frac{2}{3} \delta_{ij} g_l \overline{u_l \theta} \right) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Definišimo sada bezdimenzionalno odstupanje Reynoldsovih napona od njegovog izotropnog dela, koje ćemo obeležiti sa \mathbf{a}_{ij} , relacijom:

$$\overline{u_i u_j} = q^2 \left(\frac{1}{3} \delta_{ij} + a_{ij} \right) \quad (4.42)$$

Na isti način definišemo, za flukseve toplote, veličinu \mathbf{b}_i :

$$\overline{u_i \theta} = b_i q \phi \quad (4.43)$$

gde je, analogno veličini q^2 , uvedena veličina ϕ^2 , preko varijanse potencijalne temperature ($\phi^2 = \overline{\theta^2}$). Veličine a_{ij} i b_i su u stvari mere *neizotropnosti*. U narednoj tabeli je dat "inventar" do sada definisanih

Razmer	Veličina
ϕ^2	$\bar{\theta}^2$
l	$O(l_1) = O(l_2)$
λ	$O(\Lambda_1) = O(\Lambda_2)$
a	$O(a_{ij})$
U_x	$O(\partial U_i / \partial x_j)$
Θ_x	$O(\partial \Theta / \partial x_j)$
b	$O(b_i)$

Tabela 4.2: Tabela razmera i veličina koje će se koristiti pri razmernoj analizi jednačina drugog reda

veličina. Tabela u desnoj koloni sadrži same veličine dok se u levoj koloni nalaze oznake njihovih razmera. Napomenimo da kod skalarnih veličina nismo pravili razliku između veličine i njene razmere. Zamenujući definicije (4.42) i (4.43) u jednačine (4.40) odnosno (4.41), za izotropni i neizotropni deo, može se dobiti:

izotropni deo-

$$\frac{Dq^2}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[q\lambda_1 \frac{5}{3} \frac{\partial q^2}{\partial x_k} \{1 + O(a^2)\} \right] = \begin{matrix} -2a_{ki}q^2 \frac{\partial U_i}{\partial x} & -2b_k g_k \beta q \phi & -2\frac{q^3}{\Lambda} \\ aq^2 U_x & bg\beta q \phi & \frac{q^3}{\Lambda} \end{matrix} \quad (4.44)$$

Drugi red u jednačini (4.44) označava razmer svakog člana prema usvojenim oznakama.

neizotropni deo-

$$\begin{aligned} & \frac{D(a_{ij}q^2)}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{q\lambda_1}{3} \left\{ \delta_{ik} \frac{\partial q^2}{\partial x_j} + \delta_{kj} \frac{\partial q^2}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial q^2}{\partial x_k} \right\} \{1 + O(a)\} \right] \\ &= -q^2 \left[\left\{ \frac{\delta_{ik}}{3} + a_{ik} \right\} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \left\{ \frac{\delta_{jk}}{3} + a_{jk} \right\} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} a_{kl} \frac{\partial U_l}{\partial x_k} - C_1 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \\ & \quad - \beta q \phi \left(b_i g_j + b_j g_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} b_k g_k \right) + \frac{q^3}{3l_1} a_{ij} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Razmere svakog od članova u jednačini (4.45) su sledeće.

Za prvi član imamo :

$$\frac{D(a_{ij}q^2)}{Dt} \approx \frac{aUq^2}{L}, \quad (4.46)$$

za tubulentnu difuziju

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{q\lambda_1}{3} \left\{ \delta_{ik} \frac{\partial q^2}{\partial x_j} + \delta_{kj} \frac{\partial q^2}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial q^2}{\partial x_k} \right\} \{1 + O(a)\} \right] \approx \frac{aq^3}{\Lambda}, \quad (4.47)$$

za produkciju zbog smicanja kao i deo člana redistribucije imamo

$$\begin{aligned} & -q^2 \left[\left\{ \frac{\delta_{ik}}{3} + a_{ki} \right\} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \left\{ \frac{\delta_{jk}}{3} + a_{kj} \right\} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right] \\ & \left[-\frac{2}{3} \delta_{ij} a_{kl} \frac{\partial U_l}{\partial x_k} - C_0 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \\ & \approx qU_x [1 + O(a)] \approx \frac{q^3}{a\Lambda} [1 + O(a)], \end{aligned} \quad (4.48)$$

za produkciju zbog rada sile potiska imamo

$$\beta q \phi \left(b_i g_j + b_j g_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} b_k g_k \right) \approx q \phi b g \approx \frac{q^3}{\Lambda} \quad (4.49)$$

i konačno za disipaciju imamo:

$$\frac{q^3}{3l_1} a_{ij} \approx \frac{aq^3}{l} \approx \frac{aq^3}{\Lambda} \quad (4.50)$$

Da bi mogli da ih uporedimo poćićemo od osnovnog principa razmerne analize da bar dva člana u nekoj jednačini moraju biti dominantna. U najprostijem slučaju, kod bilansa **tke**, postoji ravnoteža produkcije zbog smicanja i disipacije. Dakle:

$$aq^2 U_x = \frac{q^3}{\Lambda} \quad (4.51)$$

Analogno u jednačini za neizotropni deo Rejnoldsovih napona, jednačina (4.44), mora postojati ravnoteža prvog i trećeg člana jer disipacija mora biti reda veličine dominantnih članova

$$q^2 U_x \approx \frac{aq^3}{l} \quad (4.52)$$

Relacije (4.50) i (4.51) daju:

$$a^2 = \frac{l}{\Lambda} \quad , \quad U_x = \frac{q}{a\Lambda} \quad (4.53)$$

Na isti način ravnoteža članova na desnoj strani jednačine za varijansu temperature daje:

$$q\phi b \Theta_x \approx \frac{q\phi^2}{\Lambda} \quad (4.54)$$

Uz pretpostavku o dominantnosti prvog i zadnjeg člana u jednačini za neizotropni deo fluksa toplote imamo:

$$q^2 \Theta_x \approx \frac{q^2 \phi b}{l} \quad (4.55)$$

što onda daje:

$$b^2 = \frac{l}{\Lambda} \quad , \quad \Theta_x \approx \frac{\phi}{b\Lambda} \quad (4.56)$$

Očigledno iz prvih relacija u (4.53) i (4.56) sledi da je $a = b$. I konačno ako još produkciju zbog rada sile potiska uzmemo da je reda veličine disipacije dobijamo:

$$q\phi\beta \approx \frac{q^2}{\Lambda b} \quad (4.57)$$

Korišćenjem ovih relacija razmeri članova na desnim stranama u (4.51) $q^2 U_x \approx a^{-1} q^3 / \Lambda$ a u (4.53) $b g \beta q \phi \approx a^{-1} q^3 / \Lambda$ i u (4.49) $a q^3 / l \approx a^{-1} q^3 / \Lambda$. Kako je već napomenuto, razmeri parametara neizotropnosti a i b su mali, $O(a_{ij}) \approx 0.15$. Sa druge strane, iz merenja, za neutralne tokove se zna da je odnos $l/\Lambda \approx 0.05-0.1$. Kako smo pokazali ovaj odnos je tog reda veličine i za stratifikovane slučajeve. Koristeći rezultat da je $l/\Lambda \approx a^2$ dobija se razmer difuznog člana.

Razmer vremenski zavisnih članova se menja od problema do problema. Njihov smo razmer označili sa Uq^2/L gde je L za sada nedefinisana razmera dužine. Prema pretpostavkama o ovim članovima prećićemo na formiranje raznih nivoa aproksimacija.

Nivo 3:

Nivo 3 se dobija ako se pretpostavi da su advektivni i difuzni član istog reda veličine, a da je taj red veličine dat sa

$$U \frac{q^2}{L} = \frac{aq^3}{\Lambda} \quad (4.58)$$

a potom se nakon množenja jednačina za nedijagonalne Rejnoldsove napone sa a odnosno b zanemare svi članovi reda $O(a^2)$ i reda $O(b^2)$. Tako se dobija sledeći skup jednačina:

za **tk**:

$$\frac{Dq^2}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{5}{3} q \lambda_1 \frac{\partial q^2}{\partial x_k} \right] = -2 \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{2q^3}{\Lambda_1} - 2\beta g_i \overline{u_i \theta} \quad (4.59)$$

za Rejnoldsove napone:

$$\begin{aligned} \overline{u_i u_j} = \frac{\delta_{ij}}{3} q^2 - \frac{3l_1}{q} \left[(\overline{u_i u_k} - C_1 q^2 \delta_{ik}) \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + (\overline{u_j u_k} - C_1 q^2 \delta_{jk}) \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{u_l u_k} \frac{\partial U_l}{\partial x_k} \right] \\ - \frac{3l_1}{q} \beta \left(g_j \overline{u_i \theta} + g_i \overline{u_j \theta} - \frac{2}{3} \delta_{ij} g_l \overline{u_l \theta} \right) \end{aligned} \quad (4.60)$$

za varijansu potencijalne temperature:

$$\frac{D\overline{\theta^2}}{Dt} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[q \lambda_3 \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_k} \right] = -2 \overline{\theta u_k} \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} - 2 \frac{q}{\Lambda_2} \overline{\theta^2} \quad (4.61)$$

za flukseve potencijalne temperature:

$$\overline{u_i \theta} = -\frac{3l_2}{q} \left[\overline{u_i u_k} \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} + \overline{\theta u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \beta g_i \overline{\theta^2} \right] \quad (4.62)$$

Dakle od svih prognostičkih jednačina preostaju samo prognostičke jednačine za **tke** i varijansu potencijalne temperature, dok su svi fluksevi dati dijagnostičkim relacijama. Na taj način je postignuta značajna redukcija broja prognostičkih jednačina !

Nivo 2

Nivo 2 se dobija ako se snizi red veličine za advektivne i difuzne članove tj. ako se uzme da je:

$$U \frac{q^2}{L} = \frac{a^2 q^3}{\Lambda} \quad (4.63)$$

i ako opet zanemarimo samo članove reda $O(a^2)$ i reda $O(b^2)$. Tada se dobija:
za **tke**:

$$\frac{q^3}{\Lambda_1} = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \beta g_i \overline{u_i \theta} \quad (4.64)$$

za *Rejnoldsove napone*:

$$\begin{aligned} \overline{u_i u_j} = & \frac{\delta_{ij}}{3} q^2 - \frac{3l_1}{q} \left[(\overline{u_i u_k} - C_1 q^2 \delta_{ik}) \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + (\overline{u_j u_k} - C_1 q^2 \delta_{jk}) \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{u_l u_k} \frac{\partial U_l}{\partial x_k} \right] \\ & - \frac{3l_1}{q} \beta \left(g_j \overline{u_i \theta} + g_i \overline{u_j \theta} - \frac{2}{3} \delta_{ij} g_l \overline{u_l \theta} \right) \end{aligned} \quad (4.65)$$

za *varijansu potencijalne temperature*:

$$\frac{q}{\Lambda_2} \overline{\theta^2} = -\overline{\theta u_k} \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} \quad (4.66)$$

za *flukseve potencijalne temperature*:

$$\overline{u_i \theta} = -\frac{3l_2}{q} \left[\overline{u_i u_k} \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} + \overline{\theta u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \beta g_i \overline{\theta^2} \right] \quad (4.67)$$

Za razliku od prethodnog slučaja sada više nema nijedne prognostičke jednačine.

Konačno, **nivo 1** se dobija ako se zanemare svi članovi reda $O(a)$ i reda $O(b)$ što daje sistem :
za **tke**:

$$\frac{q^3}{\Lambda_1} = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \beta g_i \overline{u_i \theta} \quad (4.68)$$

za *Rejnoldsove napone*:

$$\overline{u_i u_j} = \frac{\delta_{ij}}{3} q^2 - l_1 q \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) \quad (4.69)$$

za *varijansu potencijalne temperature*:

$$\frac{q}{\Lambda_2} \overline{\theta^2} = -\overline{\theta u_k} \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} \quad (4.70)$$

za *flukseve potencijalne temperature*:

$$\overline{u_i \theta} = -q l_2 \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} - \frac{3l_2}{q} \beta g_i \overline{\theta^2} \quad (4.71)$$

4.2.3 Aproksimacije jednačina u slučaju PGS-a

Ovaj opšti sistem se znatno uprošćava kada se primeni na planetarni granični sloj. Kod razmatranja planetarnog graničnog sloja, možemo primeniti **hidrostatičku aproksimaciju**, zbog veoma malog odnosa L_z/L_x , jer je horizontalni dužinski razmer $L_x \sim 10^3 \div 10^2 km$ dok je vertikalni dužinski razmer $L_z \sim 10 km$. Ako opet idemo redom po nivoima zatvaranja imamo:

nivo 4:

dijagonalni članovi:

$$\frac{D}{Dt} \begin{pmatrix} \overline{u^2} \\ \overline{v^2} \\ \overline{w^2} \end{pmatrix} - D_1 \begin{pmatrix} \overline{u^2} \\ \overline{v^2} \\ \overline{w^2} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} P_{xx} \\ P_{yy} \\ \beta g w \theta \end{pmatrix} - \frac{q}{3l_1} \begin{pmatrix} \overline{u^2} - q^2/3 \\ \overline{v^2} - q^2/3 \\ \overline{w^2} - q^2/3 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \frac{q^2}{\Lambda_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.72)$$

nedijagonalni članovi:

$$\frac{D}{Dt} \begin{pmatrix} \overline{uv} \\ \overline{wu} \\ \overline{wv} \end{pmatrix} - D_1 \begin{pmatrix} \overline{uv} \\ 2\overline{wu} \\ 2\overline{wv} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} P_{xy} + P_{yx} \\ (\overline{w^2} - C_1 q^2) \partial U / \partial z - \beta g \overline{u\theta} \\ (\overline{w^2} - C_1 q^2) \partial V / \partial z - \beta g \overline{v\theta} \end{pmatrix} - \frac{q}{3l_1} \begin{pmatrix} \overline{uv} \\ \overline{wu} \\ \overline{wv} \end{pmatrix} \quad (4.73)$$

Za varijansu temperature:

$$\frac{D}{Dt} \overline{\theta^2} - \overline{\theta^2} = -2\overline{\theta w} \frac{\partial \theta}{\partial z} - 2 \frac{q}{\Lambda_2} \overline{\theta^2} \quad (4.74)$$

kao i za flukseve temperature:

$$\frac{D}{Dt} \begin{pmatrix} \overline{u\theta} \\ \overline{v\theta} \\ \overline{w\theta} \end{pmatrix} - D_1 \begin{pmatrix} \overline{u\theta} \\ \overline{v\theta} \\ \overline{w\theta} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \overline{uw} \\ \overline{vw} \\ \overline{ww} \end{pmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \begin{pmatrix} \overline{w\theta} \partial U / \partial z \\ \overline{w\theta} \partial V / \partial z \\ -\beta g \overline{\theta^2} \end{pmatrix} - \frac{q}{3l_2} \begin{pmatrix} \overline{u\theta} \\ \overline{v\theta} \\ \overline{w\theta} \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

nivo 3:

Prognostičke jednačine

za **tke**:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{q^2}{2} \right) - \frac{5}{3} D_1 \left(\frac{q^2}{2} \right) = P_{xx} + P_{yy} + \beta g \overline{w\theta} - \frac{q^3}{\Lambda_1} \quad (4.76)$$

za varijansu potencijalne temperature:

$$\frac{D}{Dt} \overline{\theta^2} = -2\overline{\theta w} \frac{\partial \theta}{\partial z} - 2 \frac{q}{\Lambda_2} \overline{\theta^2} \quad (4.77)$$

za dijagonalne članove:

$$\begin{pmatrix} \overline{u^2} \\ \overline{v^2} \\ \overline{w^2} \end{pmatrix} = \frac{q}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{l_1}{q} \begin{pmatrix} 4P_{xx} - 2P_{yy} - 2\beta g \overline{w\theta} \\ -2P_{xx} + 4P_{yy} - 2\beta g \overline{w\theta} \\ -2P_{xx} - 2P_{yy} + 4\beta g \overline{w\theta} \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

za nedijagonalne članove:

$$-\begin{pmatrix} \overline{uv} \\ \overline{wu} \\ \overline{wv} \end{pmatrix} = \frac{3l_1}{q} \begin{pmatrix} P_{xy} + P_{yx} \\ (\overline{w^2} - C_1 q^2) \partial U / \partial z - \beta g \overline{u\theta} \\ (\overline{w^2} - C_1 q^2) \partial V / \partial z - \beta g \overline{v\theta} \end{pmatrix} \quad (4.79)$$

i za flukseve temperature:

$$-\begin{pmatrix} \overline{u\theta} \\ \overline{v\theta} \\ \overline{w\theta} \end{pmatrix} = \frac{3l_2}{q} \begin{pmatrix} \overline{uw} \partial \Theta / \partial z + \overline{w\theta} \partial U / \partial z \\ \overline{wv} \partial \Theta / \partial z + \overline{w\theta} \partial V / \partial z \\ \overline{w^2} \partial \Theta / \partial z - \beta g \overline{\theta^2} \end{pmatrix} \quad (4.80)$$

gde su uvedene oznake:

$$P_{ij} = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (4.81)$$

Da bi se ovaj sistem jednačina integralio moraju se formirati granični uslovi. One su, što se tiče prostornih izvoda, jednačine drugog reda pa se moraju formulisati dva granična uslova. Skoro bez izuzetka, za gornji granični uslov se uzima za brzinu:

$$z \rightarrow \infty \quad ; \quad U = U_g \quad , \quad V = V_g, \quad (4.82)$$

dok su svi turbulentni fluksevi i **tke** zanemarivi:

$$z \rightarrow \infty \quad ; \quad (\overline{uw}, \overline{uv}, \overline{w\theta}, q^2) = 0 \quad (4.83)$$

Drugi granični uslov se definiše na tlu odnosno u blizini tla. Kako iz analize odnosa flukseva količine kretanja i fluksa toplote u neposrednoj blizini tla znamo za dominaciju fluksa količine kretanja u prvoj aproksimaciji se može uzeti da se vetar i temperatura (potencijalna) menjaju po logaritamskom zakonu. Što se tiče glavne razmere l , prema Parntl-ovoj teoriji a i prema empirijskim saznanjima ona je srazmerna sa z . Dakle:

$$z \rightarrow 0^+ \quad ; \quad U(z) \approx \log(z/z_{0m}), \quad \Theta(z) \approx \log(z/z_{0h}), \quad l(z) \approx \kappa z \quad (4.84)$$

Kao alternativa zadavanja donjih graničnih uslova za vetar i temperauru, uz uslov da je najniži sloj dovoljno tanak, možemo fluksve količine kretanja i toplote odrediti na osnovu *iterativnog* postupka iz

Monin-Obuhov teorije (vidi dodatak **B**). I konačno treba formirati donje granične uslove za \mathbf{tke} i $\overline{\theta^2}$. Uz samo tlo smatramo da su difuzija \mathbf{tke} kao i njena vremenska promena znatno manje od produkcije smicanjem. Kako je i produkcija zbog rada sile potiska ovde mnogo manja od produkcije zbog smicanja ostaje, kao jedina mogućnost, ravnoteža produkcije zbog smicanja i disipacije. Ovaj zahtev daje donji granični uslov za \mathbf{tke} . Što se tiče varijanse potencijalne temperature polazeći od brzine trenja u_τ i fluksa toplote od podloge $(\overline{w\theta})_0$, možemo formirati traženu veličinu. Dakle za donje granične vrednosti uzimamo:

$$z \rightarrow 0^+ \quad ; \quad q^3(0) = u_\tau^3 \quad , \quad \overline{\theta^2}(0) = (\overline{w\theta})_0^2 / u_\tau^2. \quad (4.85)$$

Ukoliko se turbulentne veličine računaju u prognostičkom modelu, koji ima diskretizovanu vertikalnu koordinatu, još jednom naglašavamo da za opravdanost ovakvih donjih graničnih uslova najniži nivo modela treba postaviti dovoljno nisko tako da zaista važi Monin-Obuhov teorija.

nivo 2:

$$\frac{q^3}{\Lambda_1} = -\overline{uw} \frac{U}{z} + -\overline{vw} \frac{V}{z} + \beta g \overline{w\theta} \quad (4.86)$$

$$\frac{q}{\Lambda_2} \overline{\theta^2} = -\overline{\theta w} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \quad (4.87)$$

Ako se preko P_{xx} i P_{yy} napiše Ričardsonov fluksni broj i uvede veličina Γ definisana kao:

$$Ri_f = \frac{\beta \overline{w\theta}}{P_{xx} + P_{yy}} \quad , \quad \Gamma = \frac{Ri_f}{1 - Ri_f} \quad (4.88)$$

onda se dobija

$$-(\overline{uw}, \overline{vw}) = l_1 q \tilde{S}_M \left(\frac{\partial U}{\partial z}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) \quad (4.89)$$

i

$$-\overline{w\theta} = l_2 q \tilde{S}_H \frac{\partial \Theta}{\partial z} \quad (4.90)$$

gde je

$$\tilde{S}_M = 3A_1 \frac{\gamma_1 - C_1 - (6A_1 + 3A_2)\Gamma/B_1}{\gamma_1 - \gamma_2\Gamma + 3A_1\Gamma/B_1} (\gamma_1 - \gamma_2\Gamma) \quad (4.91)$$

a

$$\tilde{S}_H = 3A_2 (\gamma_1 - \gamma_2\Gamma) \quad (4.92)$$

i na kraju

$$\gamma_1 = \frac{1}{3} - \frac{2A_1}{B_1}, \quad \gamma_2 = \frac{B_2}{B_1} + \frac{6A_1}{B_1} \quad (4.93)$$

Konačno navešćemo i nivo 1, koji je empirijski izveden pre nego štoje data ova klasifikacija, a u stvari predstavlja ne konzistentnu redukciju nivoa 2.

nivo 1: i

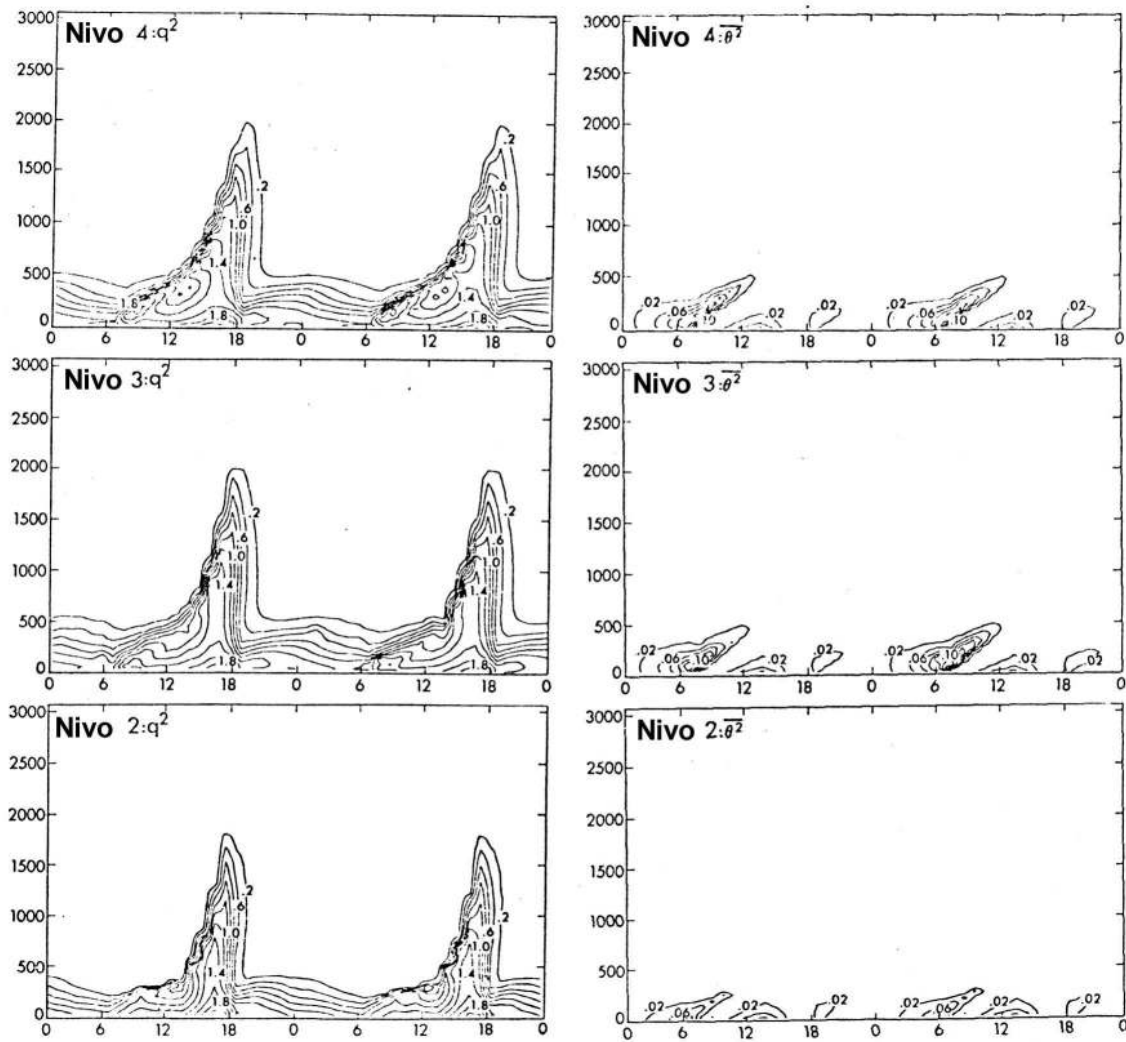
za flukseve količine kretanja se dobija:

$$-(\overline{uw}, \overline{vw}) = l_1 q \left(\frac{\partial U}{\partial z}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) \quad (4.94)$$

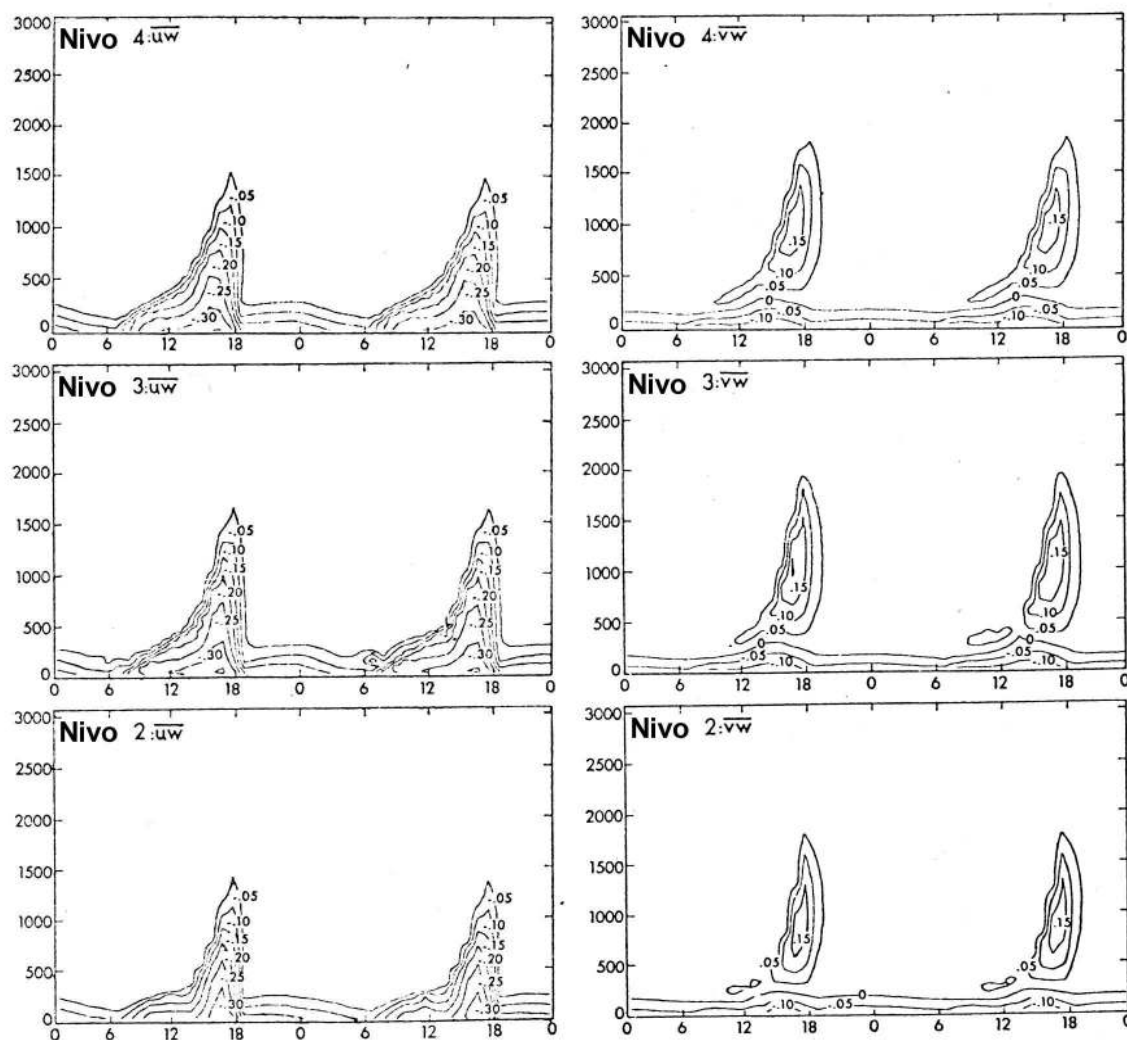
a za vertikalni fluks toplote se dobija:

$$-\overline{w\theta} = l_2 q \frac{\partial \Theta}{\partial z} \quad (4.95)$$

Kao i uvek kada se koristi razmerna analiza konačna potvrda uspešnosti se dobija nakon međusobnog poredjenja rezultata sva četiri nivoa aproksimacije. Prikaz tih rezultata je dat na slikama (4.4) i (4.5) koje su preuzete iz ((17)). Kao glavni i opšti rezultat se može dati konstatacija da su rezultati dobijeni sa nivoom 3 mnogo bliži punom modelu, nivo 4, nego što je razlika između nivoa 3 i nivoa 2. Recimo nivo turbulentne kinetičke energije je skoro isti uz nešto veće vrednosti kod nivoa 4. Takodje je visina graničnog sloja skoro ista (neznatno veća kod nivoa 4). Napomenimo još na kraju da se metodom pokušaja i greške pokazalo da se kvalitet prognoze održi i kad se u prognostičkoj jednačini za varijansu temperature zanemari izvod po vremenu tj. kada se i ona svede na dijagnostičku relaciju. Ovakvo zatvaranje se najčešće onda označava kao nivo 2.5 (vidi Jamada (29)). Na osnovu ovih rezultata i mnogih drugih simulacija nivo 2.5 je na neki način postao standardan nivo zatvaranja kod novijih modela za



Slika 4.4: Dnevni hod: (levo) turbulentne kinetičke energije, (desno) varijanse potencijalne temperature. (prema (17))



Slika 4.5: Reynoldsovi naponi, paralelni geostrofskom vetru, (levo) i normalni na pravac geostrofskog vetra (desno) (prema (17))

prognozu vremena a takodje i kod okeanskih modela. Iako je ova parametrizacija publikovana još 1973. relativno kasno je zatvaranje drugog reda uključeno u operativne modele meteoroloških službi. Treba napomenuti da pri relativno velikim vremenskim koracima, onima koji su standardni u modelima za prognozu vremena, može da se pojavi problem *realizabilnosti*. Prema definiciji Janjića (privatna komunikacija) realizabilnost je zahtev da model pri nivou forsiranja koje se može sresti u prirodi mora da proizvede uobičajene koeficijente mešanja ili *tke*. Ovaj, na prvi pogled trivijalan zahtev, i nije lako, čak ni moguće, ispuniti bez dodatnog razvoja prethodno prikazanog modela. Za implementaciju ovog modela, u modelima za prognozu vremena videti radove od Janjića (8), (10) i(9), a o ovom će biti detaljnije razmatrano u kursu o parametrizacijama fizičkih procesa u modelima za prognozu vremena.

4.3 Zatvaranje trećeg reda

Kako smo to već istakli kod zatvaranja drugog reda rezultati koje ta parametrizacija daje su veoma zadovoljavajući. Medjutim, postoji jedna klasa problema kod kojih verovatno postoji potreba za formiranjem jednačina za momente trećeg reda. To je modelovanje turbulentnih polja u blizini jake temperaturne inverzije koja se često sreće pri vrhu planetarnog graničnog sloja. To je jedno od retkih mesta gde postoje tzv. uz-gradijentni transporti veličina. U ovom slučaju potencijalna temperatura se prenosi od mesta sa nižom vrednošću ka mestu sa višom vrednošću. Ako bi htelo da se ostane pri formi da je srednji fluks temperature srazmeran srednjem gradijentu temperature, tada uz-gradijentni transfer zahteva "negativnu" vrednost koeficijenta razmene što je protivno osnovnoj predstavi o njemu. Ipak treba napomenuti da se i u okviru teorije zatvaranja drugog reda, u njenoj najopštijoj formi, mogu realizovati uz-gradijentni transporti. Tek kada se koristi uprošćenija verzija, kod koje se zaista dobija da su fluksevi proporcionalni gradijentima srednjih vrednosti, primedbe u vezi sa uz-gradijentnim transferom stoje.

Teorija zatvaranja momenata trećeg reda neće biti izložena sa onoliko detalja kao teorija zatvaranja momenata drugog reda, već će se samo naglasiti neki aspekti i problemi. Analogno načinu na koji se formiraju jednačine za momente drugog reda, formiraju se i jednačine za momente trećeg reda:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i u_j u_k} &= \\ \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i u_j \theta} &= \\ \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i \theta^2} &= \end{aligned} \quad (4.96)$$

$$\frac{\partial \overline{\theta^3}}{\partial t} =$$

•

•

Kao jedna ilustracija neka posluži jednačina za član $\overline{w\theta^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{w\theta^2}}{\partial t} = & -U_k \frac{\partial \overline{w\theta^2}}{\partial x_k} - \frac{\partial \overline{u_k w \theta^2}}{\partial x_k} + \overline{\theta^2} \frac{\partial \overline{u_k w}}{\partial x_k} + 2\overline{w\theta} \frac{\partial \overline{u_k \theta}}{\partial x_k} \\ & - \overline{w\theta^2} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} + \overline{w w \theta} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial z} + \beta \overline{\theta^3} \end{aligned} \quad (4.97)$$

Naravno, broj nepoznatih članova kod ovog sistema jednačina je mnogo veći nego u prethodnom slučaju, a samim tim i broj dodatnih konstanti koje nije tako lako jednoznačno odrediti. Osnovna pretpostavka je da su verovatnoće odstupanja od srednjih vrednosti date Gausovom funkcijom raspodele. Dakle za veličinu $a(x)$:

$$A = \overline{a} = \int a(x) dP(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int a(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \quad (4.98)$$

Posledica ove pretpostavke je da se momenti četvrtog reda, I_4 , mogu izraziti preko momenata drugog reda, I_2 , jer se lako može pokazati da važi $I_4 = 3(I_2)^2$. Tako na primer važe relacije:

$$\overline{u_k w^3} = 3\overline{u_k w} \cdot \overline{w^2} \quad (4.99)$$

ili

$$\overline{u_k w \theta^2} = \overline{u_k w} \cdot \overline{\theta^2} + 2\overline{u_k \theta} \cdot \overline{w\theta} \quad (4.100)$$

itd. Na taj način problem zatvaranja je rešen i ostaje samo provera u odnosu na eksperimente ili merenja. Medjutim ako se izvrši integracija ovako formiranog sistema vrlo brzo dolazi do nestabilnosti za koju je karakteristična pojava "negativnih" energija. Time je opet narušen princip realizabilnosti. Ovoga puta to je posledica prevelikih vrednosti za trostruke korelacije, koje su odgovorne za transfer energije od

većih razmera ka manjim razmerama. Ovaj problem se može otkloniti uzimajući u obzir važenje sledeće nejednakosti (dokaz je u dodatku **E**); ograničenja za trostruke korelacije:

$$\overline{\alpha\beta\gamma} \leq \left[\overline{\alpha^2} \left(\overline{\beta^2\gamma^2} - \overline{\beta\gamma}^2 \right) \right]^{1/2} \quad (4.101)$$

kako još zbog pretpostavke o normalnoj raspodeli verovatnoće odstupanja važi:

$$\overline{\beta^2\gamma^2} = \overline{\beta^2} \cdot \overline{\gamma^2} - 2\overline{\beta\gamma}^2 \quad (4.102)$$

dobija se nejednakost:

$$\overline{\alpha\beta\gamma^2} \leq \overline{\alpha^2} \left[\overline{\beta^2} \cdot \overline{\gamma^2} - 2\overline{\beta\gamma}^2 \right] \quad (4.103)$$

Kako je trostruka korelacija simetrična po sva tri indeksa uslov zapravo glasi:

$$|\overline{\alpha\beta\gamma}| \leq \min \left\{ \begin{array}{l} \left[\overline{\alpha^2} \left(\overline{\beta^2\gamma^2} - 2\overline{\beta\gamma}^2 \right) \right]^{1/2} \\ \left[\overline{\beta^2} \left(\overline{\alpha^2\gamma^2} - 2\overline{\alpha\gamma}^2 \right) \right]^{1/2} \\ \left[\overline{\gamma^2} \left(\overline{\beta^2\alpha^2} - 2\overline{\beta\alpha}^2 \right) \right]^{1/2} \end{array} \right. \quad (4.104)$$

Ova relacija se koristi kao preventiva da trostruke korelacije ne predju fizički opravdane maksimume, tj. u svakom koraku se proveravaju vrednosti svih trostrukih korelacija i koja predje ograničenje, izjednačuje se sa maksimalno dozvoljenom vrednošću. Ukoliko se u model ugradi i ovaj postupak integracije se mogu privesti kraju a rezultati su zadovoljavajući čak i u onim situacijama kada je trebalo simulirati procese koji se karakterišu uz-gradijentnim transportima. Za detaljniji prikaz pogledati rad od (11).

Elementi teorije graničnog sloja

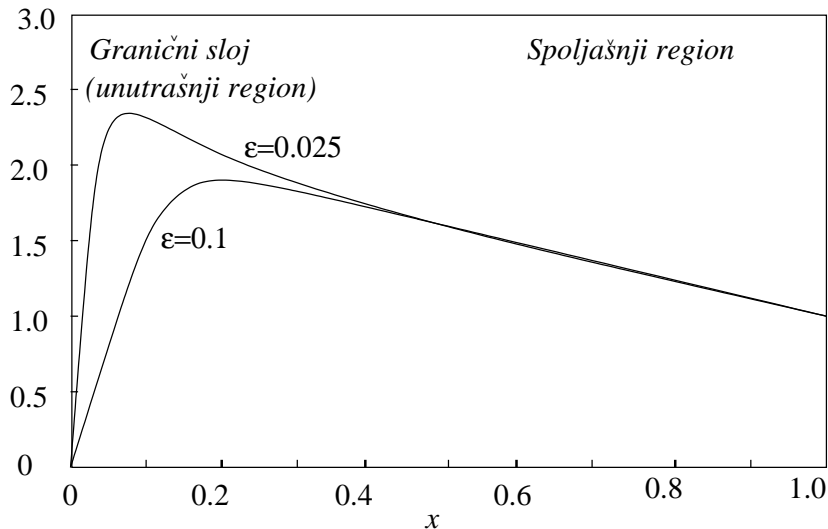
Granični sloj se može definisati kao region gde se rešenje diferencijalne jednačine menja veoma brzo. Ovo se dešava kada je najviši izvod pomnžen sa malim parametrom. Opšta metoda rešavanja ovakvih problema je teorija perturbacije a metodologija graničnog sloja je njen najprostiji oblik. Prema definiciji graničnog sloja njegova debljina teži ka nuli kada vrednost malog parametra, ε , teži nuli. Mi ćemo se zadržati na slučaju izolovanog graničnog sloja koji se javlja na granici intervala definisanosti. Najlakše objašnjenje ovog fenomena je preko nekoliko primera. Kao prvi primer uzmimo jednačinu:

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + (1 + \varepsilon) \frac{dy}{dx} + y = 0 \quad (\text{A.1})$$

uz granične uslove $y(0) = 0$ i $y(1) = 1$. Tačno rešenje ove jednačine je

$$y(x) = \frac{e^{-x} - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{e^{-1} - e^{\frac{1}{\varepsilon}}} \quad (\text{A.2})$$

Analizirajmo sada osobine ovog rešenja. Ako $\varepsilon \rightarrow 0^+$ tada rešenje ima prekid u tački $x = 0$. Za malu vrednost ε rešenje se sporo menja sa promenom x -a sem u uzanom regionu oko 0, unutar intervala $0 < x < \varepsilon$, gde se rešenje jako brzo menja. Upravo ovaj region se naziva graničnim slojem i on je



Slika A.1: Grafik funkcije $y(x) = (e^{-x} - e^{-\frac{x}{\epsilon}})/(e^{-1} - e^{-\frac{1}{\epsilon}})$, na intervalu $(0 \leq x \leq 1)$ za dve vrednosti parametra $\epsilon = 0.1$ i 0.025 . Pri manjoj vrednosti ϵ -a uži je granični sloj odnosno unutrašnji region. (Prema Orzag i Bender, 1978)

debljine $O(\epsilon)$. Region u kome su promene spore naziva se spoljni (spoljašnji) region. Najopštije rešenje bi bilo ono koje daje vrednosti y -a za svako x , tzv. globalno rešenje. Međutim u opštem slučaju nije potrebno poznavati *globalno* rešenje. Analiza se može uraditi tako što se posebno razmatraju ponašanja u spoljašnjem regionu gde se može zanemariti najviši član koji je pomnožen sa malim parametrom. Unutar graničnog sloja koji je po pravilu veoma mali možemo smatrati da su koeficijenti u jednačini *konstatni* i tako veoma uprostiti problem. Dakle, jednačina se aproksimira sa više rešenja za spoljašnji i unutrašnji region, kojih u principu može biti i više od jednog. Prilikom rešavanja odgovarajućih jednačina za spoljašnje i unutrašnje regione pojavice se integracione konstante koje možemo da odredimo iz zahteva da postoji asimptotsko poklapanje rešenja iz graničnog sloja i spoljašnjeg regiona. To poklapanje je u prelaznom sloju od graničnog sloja ka spoljašnjem regionu i obrnuto. Uvedimo u graničnom sloju novu promenljivu $X = x/\epsilon$. Ovaj se postupak naziva i *teleskopiranje* jer se uzani deo, granični sloj koji je veoma mali i reda $O(\epsilon)$, preslikava na konačan interval reda $O(1)$ preko promenljive X . Tada se granični

uslov izlaska iz graničnog sloja ka spoljašnjem sloju može naznačiti kao

$$\lim_{X=\frac{x}{\delta} \rightarrow +\infty} y(X) \quad (\text{A.3})$$

dok prelaz iz spoljašnjeg sloja ka graničnom sloju naznačavamo kao ¹

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) \quad (\text{A.4})$$

i tada asimptotsko sklapanje znači :

$$\lim_{X=\frac{x}{\delta} \rightarrow +\infty} y(X) = \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) \quad (\text{A.5})$$

pri čemu ove granične vrednosti u opštem slučaju mogu biti ispunjene i na nekom podskupu realnih brojeva, odnosno da imamo "preklapanje" funkcija a ne samo jednakost graničnih vrednosti u jednoj tački. Veličinu koja zadovoljava relaciju (A.5) obeležavamo sa y_{spoj} . Shematski ovo se može prikazati kao na slici (A.2). Vratimo se ponovo našem primeru. Izvan graničnog sloja, jednačinu možemo aproksimirati kao

$$\frac{dy_{sp}}{dx} + y_{sp} = 0 \quad (\text{A.6})$$

gde je uvedena oznaka y_{sp} za deo rešenja koji važi za deo domena izvan graničnog sloja. Rešenje za y_{sp} je:

$$y_{sp}(x) = C e^{-x} \quad (\text{A.7})$$

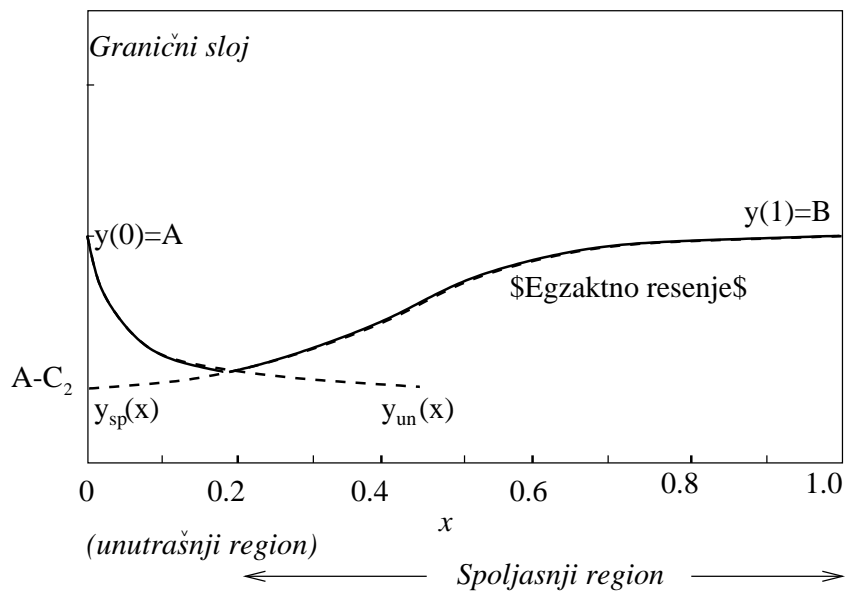
Granični uslov koji određuje C je onaj sa kraja domena ($x = 1$):

$$y(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad C = e, \quad (\text{A.8})$$

što, za spolašnje rešenje, daje:

$$y_{sp}(x) = e^{1-x}. \quad (\text{A.9})$$

¹Ako bi debljina spoljašnjeg sloja bila δ a ne 1 kao u našem sličaju tada bi prelaz $x \rightarrow 0^+$ postao $\frac{x}{\delta} \rightarrow 0^+$



Slika A.2: Shematski prikaz rešenja problema granične vrednosti $\epsilon y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$ na domenu $[0 \leq x \leq 1]$ uz uslov $a(x) > 0$ i uz granične uslove $y(0) = A$ i $y'(1) = B$

Naravno, kako je (A.6) jednačina nižeg reda od polazne, možemo da zadovoljimo deo graničnih uslova, u ovom slučaju to je bio desni granični uslov. Levi granični uslov će biti zadovoljen unutrašnjim rešenjem koje važi za granični sloj. Tu uvedimo smenu $X = x/\epsilon$. Tada polazna jednačina postaje:

$$\frac{d^2Y}{dX^2} + \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right) \frac{dY}{dX} + Y = 0 \quad (\text{A.10})$$

ako sada $\epsilon \rightarrow 0+$ tada $1/\epsilon \gg 1$ pa jednačina (A.10) prelazi u

$$\frac{d^2Y}{dX^2} + \frac{dY}{dX} = 0 \quad (\text{A.11})$$

ili

$$\frac{d}{dX} \left(\frac{dY}{dX} + Y \right) = 0 \quad (\text{A.12})$$

odnosno

$$\left(\frac{dY}{dX} + Y \right) = C_2 \quad (\text{A.13})$$

što daje

$$\frac{d}{dX} (Y - C_2) + (Y - C_2) = 0 \quad (\text{A.14})$$

sada se rešenje može direktno napisati u obliku

$$Y(X) = C_3 - C_2 e^{-X} \quad (\text{A.15})$$

Vidimo da se za unutrašnji deo domena pojavljuju *dve* integracione konstante C_2 i C_3 jer je (A.11) jednačina drugog reda. Na prvi pogled imamo problem jer nam je preostao samo jedan granični uslov, onaj koji važi za $x = 0$. Iz ovog graničnog uslova odredjujemo C_2 . Drugu konstantu odredjujemo iz uslova za *neprekidnošću* pri prelazu iz unutrašnjeg ka spoljašnjem delu domena, koji formulišemo kao:

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} Y = \lim_{x \rightarrow 0^+} y_{sp}.$$

Kako je drugi limes jednak e dobijamo da je $C_3 = e$. Dakle:

$$Y(X) = e - C_2 e^{-X} \quad (\text{A.16})$$

Kako smo već napomenuli granični uslov $y(0) = 0$ se koristi za odredjivanje C_2 , što daje $C_2 = e$, pa unutrašnje rešenje je postaje:

$$Y(X) = e^{1-X} = e^{(1-\frac{x}{\epsilon})} \quad (\text{A.17})$$

Sada kada imamo spoljašnje i unutrašnje rešenje kako naći i *uniformnu* aproksimaciju tačnog rešenja koja će da važi za ceo domen? Svaka od aproksimacija važi za svoj deo domena. Unutrašnje rešenje je rešenje koje dobro opisuje ponašanje funkcije u graničnom domenu a spoljašnje rešenje dobro opisuje

ponašanje funkcije u ostatku domean. Kod oderedjivanja C_3 postavili smo dodatni zahtev da kada $x/\varepsilon \rightarrow +\infty$ i kada $x \rightarrow +0$ respektivna rešenja teže *istoj* funkciji. Ovo, zajedničko rešenje, ćemo da obeležimo kao y_{spoj} . U našem primeru y_{spoj} je

$$y_{spoj} = e \quad (\text{A.18})$$

konstanta. U opštem sličaju to može biti i funkcija. To je upravo bio slučaj kada smo tražili preklapanje zakona zida i zakona defekta i dobili logaritamsku zavisnost u delu domeana u kome se vrši spajanje. Za opšte rešenje možemo da uzmemo zbir y_{un} i y_{sp} ali da bi bilo uniformno moramo da oduzmemo y_{spoj} jer i y_{un} i y_{sp} ga već sadrže (kroz oderedjivanje integracionih konstanti). Dakle:

$$y_{unif} = y_{un} + y_{sp} - y_{spoj}. \quad (\text{A.19})$$

odnosno

$$y_{unif} = e \left(e^{-x} + e^{-x/\varepsilon} - 1 \right) \quad (\text{A.20})$$

Ako se sada vratimo jednačinama kretanja kod viskoznog fluida onda je jasno da zbog toga što je najviši izvod, u članu viskoznog trenja, pomnožen sa malim parametrom, koeficijentom viskoznosti, to je prirodno očekivati pojavu graničnog sloja u blizini tla. Ovde se mora napomenuti da je sve ovo za slučaj kada nemamo fluks toplote od podloge. Druga važna posledica činjenice da je najviši izvod pomnožen malim parametrom je to da je aproksimacija singularna, jer kada $\varepsilon \rightarrow 0^+$ dolazi do skokovite promene u prirodi diferencijalne jednačine za spoljašnji region. Kod unutrašnjeg regiona, naprotiv, priroda diferencijalne jednačine ostaje kao i pre, pa imamo regularnu aproksimaciju pravog rešenja. Medjutim, mi spajanje vršimo tamo gde teleskopirana promenljiva $X \rightarrow 0^+$ pa u tom smislu opet imamo singularitet.

Razmotrimo sada opšti slučaj graničnog problema drugog stepena,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a(x) \frac{dy}{dx} + b(x)y = 0 \quad (\text{A.21})$$

pri čemu su $a(x)$ i $b(x)$ regularne f-je na čitavom intervalu $0 < x < 1$, uz granične uslove $y(0) = A$ i $y(1) = B$. Prema prethodnoj proceduri postoje dva regiona koji posebno razmatramo. Oblast $O(\varepsilon)$, unutrašnja oblast, gde uzimamo u obzir uticaj člana $\varepsilon y''$ i ostatak oblasti, spoljašnja oblast, u kojoj zanemarujemo $\varepsilon y''$ član. Tako u spoljašnjoj oblasti, kao aproksimaciju uniformnog rešenja, imamo rešenje sledeće diferencijalne jednačine.

$$a(x) \frac{dy_{sp}}{dx} + b(x)y_{sp} = 0 \quad (\text{A.22})$$

Za ovu diferencijalnu jednačinu imamo samo jedan granični uslov koji je proizašao iz postavke problema. Pošto je ovo diferencijalna jednačina prvog reda i to homogena odmah možemo da pšemo rešenje

$$y_{sp}(x) = B \exp \left(\int_0^1 \frac{b(t)}{a(t)} dt \right) \quad (\text{A.23})$$

Unutar oblasti $0 < x < e$, puna diferencijalna jednačina se aproksimira

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a(0) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (\text{A.24})$$

Ova jednačina ima rešenje:

$$y_{un}(x) = C_1 + C_2 e^{\left(-\frac{a(0)x}{\varepsilon}\right)} \quad (\text{A.25})$$

Jednu integracionu konstantu možemo zadovoljiti iz levog graničnog uslova tj.

$$y_{un}(0) = y(0) = A \quad (\text{A.26})$$

što daje

$$y_{un}(x) = A + C_2 \left[e^{\left(-\frac{a(0)x}{\varepsilon}\right)} - 1 \right] \quad (\text{A.27})$$

Iz oblika rešenja vidimo da je debljina graničnog sloja reda veličine ε što naznačavamo sa $O(\varepsilon)$. U opštem slučaju vrednost C_2 se određuje iz asimptotskog spajanja spoljašnjeg i unutrašnjeg rešenja.

Za unutrašnje rešenje u oblasti to znači da $x/\varepsilon \rightarrow +\infty$ granični procesi daju, za unutrašnju oblast

$$y_{un}(x) \approx A - C_2, \quad \varepsilon \rightarrow 0+, \quad (\text{A.28})$$

dok za spoljašnju oblast imamo

$$y_{sp}(x) \approx y_{sp}(0) = B \exp \left[\int_0^1 \frac{b(t)}{a(t)} dt \right], \quad \varepsilon \rightarrow 0+. \quad (\text{A.29})$$

Ako želimo da postoji prelaz rešenja iz jedne u drugu oblast mora da važi

$$C_2 = A - y_{sp}(0) \quad (\text{A.30})$$

Time smo dobili obe aproksimacije, za unutrašnju oblast kao i za spoljašnju. Ovo je prikazano na slici (A.2). I konačno formiramo *uniformnu* aproksimaciju koja važi za *ceo* domen. Kao što smo već ranije to uradili,

$$y_{unif}(x) = y_{sp}(0) + y_{un}(x) - y_{spoj}(x).$$

Računanje flukseva količine kretanja i toplote pomoću Monin-Obuhov teorije

B.1 Uvod

Uzmimo opšti slučaj konzervativne veličine $S(z)$. Prema Monin-Obuhov teoriji, unutar površinskog sloja, gradijent neke veličine $S(z)$ je dat sledećom relacijom:

$$\frac{\partial S}{\partial z} = \pm \frac{P_{rs} S_{\tau} \Phi_s(\zeta)}{\kappa u_{\tau} z} \quad (\text{B.1})$$

uz definicije $L = u_{\tau}^3 / [\kappa \beta \overline{w\theta_0}]$, $\zeta = z/L$ odnosno $S_{\tau} = \overline{ws_0} / u_{\tau}$. P_{rs} je Prantlov turbulentni broj, koji u slučaju fluksa količine kretanja ima vrednost 1 a u slučaju fluksa toplote, vlage ili neke druge konzervativne pasivne supstance ima vrednost 0.74. Ukoliko je "izvor" veličine tlo, kao u slučaju toplote, vodne pare, aerosola i sl. uzima se znak $-$, dok u slučaju brzine, gde je "izvor" iznad površinskog sloja, uzima se znak $+$. Integracijom od z_{os} do z dobijamo:

$$-\frac{\kappa u_{\tau}}{P_{rs} S_{\tau}} [S(z) - S(z_{os})] = \int_{z_{os}}^z \frac{\Phi_s(\zeta)}{z} dz \quad (\text{B.2})$$

Za izračunavanje ovog integrala pogodno ga je napisati u nešto drugačijem obliku:

$$\int_{z_{os}}^z \frac{\Phi_s(\zeta)}{z} dz = \int_{z_{os}}^z \frac{1 - 1 + \Phi_s(\zeta)}{z} dz = \int_{z_{os}}^z \frac{dz}{z} - \int_{z_{os}}^z \frac{1 - \Phi_s(\zeta)}{\zeta} d\zeta \quad (\text{B.3})$$

Prvi integral je deo koji opisuje neutralnu stratifikaciju, jer kada ($\zeta \rightarrow 0$ funkcija $\Phi_s(\zeta) \rightarrow 1$, pa drugi integral nepostoji.

B.2 Nestabilna i neutralna stratifikacija

Na osnovu empirijskih rezultata (Kansas eksperiment i ostalo) za nestabilan režim funkcije Φ_m i Φ_h odnosno Φ_s se mogu aproksimirati izrazima:

$$\Phi_s = (1 + a_s \cdot \zeta)^{-1/3}$$

gde vrednost parametra a_s ima različite vrednosti za brzinu ($a_s = 11.5$) i za toplotu ($a_s = 16.5$) itd. Prvi od dva integrala u izrazu (B.3) daje logaritmsku funkciju. Da bi se rešio drugi integral, nazovimo ga I , zbog oblika funkcije Φ_s uvedimo smenu:

$$x = (1 + a_s \zeta)^{1/3} \quad (\text{B.4})$$

što daje

$$\zeta = (x^3 - 1) / a_s \quad \Rightarrow \quad d\zeta = 3x^2 \cdot dx / a_s$$

Sada integral I dobija oblik

$$I = \int_{x_{os}}^x \frac{1 - x^{-1}}{x^3 - 1} a_s \frac{1}{a_s} 3x^2 dx = \int_{x_{os}}^x \frac{3x dx}{1 + x + x^2}$$

što konačno daje

$$I = \frac{3}{2} \log \frac{1 + x + x^2}{1 + x_{s0} + x_{s0}^2} - \sqrt{3} \left(\arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \arctan \frac{2x_{s0}+1}{\sqrt{3}} \right)$$

Kada uzmemo u obzir i prvi deo polaznog integrala, $\log(z/z_{0s})$, dobijamo traženu relaciju:

$$\boxed{S(z) - S(z_0) = -\frac{P_m}{\kappa} \frac{S_1}{u_\tau} \left[\log \frac{z}{z_{s0}} - \frac{3}{2} \log \frac{1+x+x^2}{1+x_{s0}+x_{s0}^2} + \sqrt{3} \left(\arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \arctan \frac{2x_{s0}+1}{\sqrt{3}} \right) \right]} \quad (\text{B.5})$$

Relacija (B.5) uz definiciju (B.4) potpuno određuje profil (zavisnost od z) neke veličine S , u površinskom sloju, pod uslovom da znamo S_τ . Prilikom računaja flukseva toplote i količine kretanja koristeći Monin-Obuhov teoriju imamo problem što se nepoznate veličine nalaze kao argumenti transcendentnih f-ja. Jedan moguć pristup je da se račun radi iterativno. U prvoj iteraciji najčešće se uzimaju relacije koje važe za neutralnu stratifikaciju, što znači $\overline{w\theta_0} = 0$ i za u_* neki mali broj, recimo $u_* = 10^{-5}$. Tako se dobijaju prve vrednosti za flukseve. Pomoću njih se izračuna **recipročna** vrednost dužine Monin-Obuhova (L) a zatim koristeći izraze (B.4) i (B.5) izračunavamo nove vrednosti flukseva iz kojih se izračuna nova, recipročna vrednost L -a itd. Ovo se može ponoviti više puta dok se ne postigne željena tačnost. Broj iteracija koje daju željenu tačnost zavisi od gradijenta temperature i intenziteta vetra. Prilikom računanja flukseva uzimano je da su vetar i temperatura vazduha poznate na visini od 2 metra. U tabeli ((H.1) je dat potreban broj iteracija da bi razlika u fluksevima toplote između dve iteracije bila manja od 10^{-5} . Broj iteracija varira u zavisnosti od parametara problema, ΔT , gradijenta temperature i brzine vetra. Postavljeni uslov za tačnost je prilično oštar. U praksi se obično zahteva manja tačnost pa je i broj potrebnih iteracija manji. Treba napomenuti da tabela sadrži i slučajeve stabilne stratifikacije koji će biti razmatrani u sledećem odeljku.

B.3 Stabilna stratifikacija

Analogno se može postupiti i u slučaju stabilne stratifikacije, s tim što se mora napraviti ograničenje da se ne udje u režim iznad kritičnog Ri_{kr} broja. Za razliku od nestabilnog slučaja funkcije Φ_m i Φ_h u ovom režimu linearne po svojim argumentima zato je moguće eksplicitno rešiti sistem jednačina za fluks toplote i za fluks količine kretanja. Podjimo od izraza za F_m i F_h u slučaju stabilne stratifikacije. Polazeći od definicije dužine Monin-Obuhova

$$L = \frac{u_\tau^3}{\kappa\beta g \overline{w\theta_0}} \equiv \frac{u_\tau^3}{\kappa\beta g H}$$

gde je sada sa H označen fluks toplote od podloge ($\overline{w\theta_0}$), teorija sličnosti daje sledeće izraze za gradijente brzine

$$\frac{dU}{dz} = \frac{u_*}{\kappa z} \Phi_m \left(\frac{z}{L} \right) \quad (\text{B.6})$$

Znak gradijenta brzine je posledica znaka \overline{uw} jer važi

$$-\frac{\overline{uw}}{u_*} = u_* > 0$$

stb	$\downarrow \Delta T, U \Rightarrow$	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0	5.0	10.0	20.0
-1	-5.0	5	5	6	7	8	5	4	3
-1	-4.5	5	5	6	7	8	5	4	3
-1	-4.0	5	5	6	7	8	5	4	3
-1	-3.5	5	5	6	7	8	5	4	3
-1	-3.0	5	5	6	7	8	5	4	3
-1	-2.5	4	5	6	7	8	5	4	3
-1	-2.0	4	5	6	7	8	4	3	3
-1	-1.5	4	5	6	8	7	4	3	3
-1	-1.0	4	5	6	8	7	4	3	3
-1	-0.5	4	5	6	8	5	4	3	3
0	0.0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.5	4	4	5	9	6	4	3	3
1	1.0	4	4	5	7	10	4	3	3
1	1.5	4	4	5	6	19	4	3	3
1	2.0	4	4	5	6	18	5	4	3
1	2.5	4	4	5	6	12	5	4	3
1	3.0	4	4	5	6	10	5	4	3
1	3.5	4	4	5	5	9	5	4	3
1	4.0	4	4	4	5	9	5	4	3
1	4.5	4	4	4	5	8	6	4	3
1	5.0	4	4	4	5	8	6	4	3

Tabela B.1: Potreban broj iteracija da bi se razlika u fluksevima toplote između dve iteracije, bila manja od 10^{-5} , za razne vrednosti gradijenta temperature (vertikalna kolona) i intenziteta vetra (horizontalna kolona). Parameter stb je indikator nestabilnosti (-1) ili stabilnosti (1). Kada je stb = 0 imamo neutralnu stratifikaciju.

odnosno činjenice da je "izvor" količine kretanja iznad graničnog sloja. U slučaju da se imaju obe komponente brzine U treba da zameni intenzitet srednjeg vetra ($U \rightarrow \sqrt{U^2 + V^2}$). Za temperaturu imamo:

$$\frac{d\Theta}{dz} = -\frac{\theta_*}{\kappa z} \Phi_h \left(\frac{z}{L} \right) \equiv -\frac{P_{rt} H}{\kappa z u_*} \Phi_h \left(\frac{z}{L} \right) \quad (\text{B.7})$$

gde je θ_* razmer toplote (ranije obeležavan sa Θ_τ). Funkcije Φ_m i Φ_h su *linearne* u slučaju stabilne stratifikacije, oblika $(1 - 5z/L)$ pa imamo:

$$\frac{dU}{dz} = \frac{u_*}{\kappa z} \left[1 - 5 \frac{z}{L} \right] \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{d\Theta}{dz} = -\frac{\theta_*}{\kappa z} \left[1 - 5 \frac{z}{L} \right] \equiv -\frac{P_{rt} H}{\kappa z u_*} \left[1 - 5 \frac{z}{L} \right] \quad (\text{B.9})$$

Da bismo dobili profile integralimo relacije (B.8) i (B.9) od odgovarajućih z_{0m} i z_{0h} do visine z , pod uslovom da smo unutar površinskog sloja gde važi Monin-Obuhov teorija. Tako se dobija:

$$U - U(z_{0m}) = \frac{u_*}{\kappa} \left[\log \left(\frac{z}{z_{0m}} \right) - 5 \frac{z - z_{0m}}{L} \right] \quad (\text{B.10})$$

$$\Theta - \Theta(z_{0h}) = -\frac{P_{rt} H}{\kappa u_*} \left[\log \left(\frac{z}{z_{0h}} \right) - 5 \frac{z - z_{0h}}{L} \right] \quad (\text{B.11})$$

ako označimo:

$$U - U(z_{0m}) = \Delta U \quad i \quad -\frac{\Theta - \Theta(z_{0h})}{P_{rt}} = \Delta \Theta \quad (\text{B.12})$$

i uz pretpostavku da je $z \gg z_{0m}$ i $z \gg z_{0h}$ relacije (B.10) i (B.11) možemo napisati kao

$$\Delta U = \frac{u_*}{\kappa} \left[\log \left(\frac{z}{z_{0m}} \right) - 5 \frac{\beta g \kappa H}{u_*^3} z \right] \quad (\text{B.13})$$

$$\Delta \Theta = \frac{H}{\kappa u_*} \left[\log \left(\frac{z}{z_{0h}} \right) - 5 \frac{\kappa \beta g H}{u_*^3} z \right] \quad (\text{B.14})$$

dalje ako zamenimo H/u^* sa h , dobijamo

$$\Delta U = u_* \left[\frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{z}{z_{0m}} \right) - 5\beta g z \frac{h}{u_*^2} \right] \quad (\text{B.15})$$

$$\Delta \Theta = h \left[\frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{z}{z_{0h}} \right) - 5\beta g z \frac{h}{u_*^2} \right] \quad (\text{B.16})$$

I konačno uz definicije:

$$C_1^m = \frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{z}{z_{0m}} \right)$$

$$C = -5\beta g z \quad (\text{B.17})$$

$$C_1^h = \frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{z}{z_{0h}} \right)$$

dobijamo dve jednačine po nepoznatim h i u_*

$$\Delta U = u_* \left[C_1^m + C \frac{h}{u_*^2} \right] \quad ; \quad \Delta \Theta = h \left[C_1^h + C \frac{h}{u_*^2} \right] \quad (\text{B.18})$$

Eliminacija h/u_*^2 iz ove dve jednačine daje:

$$\frac{\Delta U}{u_*} + C_1^h - C_1^m = \frac{\Delta \Theta}{h} \quad (\text{B.19})$$

odnosno

$$\frac{h}{u_*} = \frac{\Delta \Theta}{\Delta U + u_* (C_1^h - C_1^m)} \quad (\text{B.20})$$

što daje

$$\Delta U = C_1^m u_* + C \frac{h}{u_*} \quad (\text{B.21})$$

Eliminacija h/u_* iz prethodne dve jednačine daje:

$$\Delta U = C_1^m u_* + C \frac{\Delta \Theta}{\Delta U + u_* (C_1^h - C_1^m)} \quad (\text{B.22})$$

ili

$$u_*^2 + \frac{[\Delta U (C_1^h - C_1^m)]}{C_1^m (C_1^m - C_1^h)} u_* + \frac{\Delta U^2 - C \Delta \Theta}{C_1^m (C_1^m - C_1^h)} = 0 \quad (\text{B.23})$$

Ako sada uvedemo oznake

$$\alpha \equiv \frac{\Delta U (C_1^h - 2C_1^m)}{C_1^m (C_1^m - C_1^h)} \quad i \quad \beta \equiv \frac{\Delta U^2 - C \Delta \Theta}{C_1^m (C_1^m - C_1^h)} \quad (\text{B.24})$$

za brzinu trenja dobijamo :

$$u_* = -\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \beta\right)} \quad (\text{B.25})$$

Kako je brzina trenja realna veličina, potkorena vrednost mora biti pozitivna. Dakle mora da važi uslov:

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \beta > 0 \quad (\text{B.26})$$

ili

$$\frac{\Delta U^2 (C_1^h - 2C_1^m)^2}{4 [C_1^m (C_1^m - C_1^h)]^2} - \frac{4 [C_1^m (C_1^m - C_1^h)] (\Delta U^2 - C \Delta \Theta)}{4 [C_1^m (C_1^m - C_1^h)]^2} > 0 \quad (\text{B.27})$$

Ako malo preuredimo prethodni izraz, uslov (B.26) postaje

$$\frac{(C_1^h - 2C_1^m)^2}{4 C C_1^m (C_1^m - C_1^h)} - 1 > \frac{\Delta \Theta}{\Delta U^2} \quad (\text{B.28})$$

I konačno zamenjujući izraze za $C = 5\beta g z$, dobijamo:

$$\frac{\beta g \Delta \Theta}{\Delta U^2} < \frac{(C_1^h - 2C_1^m)^2}{20 C_1^m (C_1^m - C_1^h) z} - 1 \quad (\text{B.29})$$

Ovo je upravo uslov za postojanje **tke**, koji je dat u odeljku *Ričardsonov broj*, preko graničnog *Ri* broja. Kako je moguće da polazne relacije za gradijente brzine i toplote "znaju" za postojanje graničnog *Ri* broja? Informacija o tome se sadrži u obliku profila funkcija ili preciznije u nagibu tih profila, a koje smo mi uzeli kao datu, empirijsku, činjenicu.

Ako se zanemari razlika kod visine trenja za toplotu i količinu kretanja što znači $C_1^m = C_1^h$, tada (B.19) postaje:

$$\frac{\Delta U}{u_*} = \frac{\Delta \Theta}{h} \quad (\text{B.30})$$

ili

$$\frac{h}{u_*} = \frac{\Delta \Theta}{\Delta U} \quad (\text{B.31})$$

dok jednačina (B.22) postaje

$$\Delta U = C_1^m u_* + C \frac{\Delta \Theta}{\Delta U} \quad (\text{B.32})$$

I konačno, za u_* dobijamo:

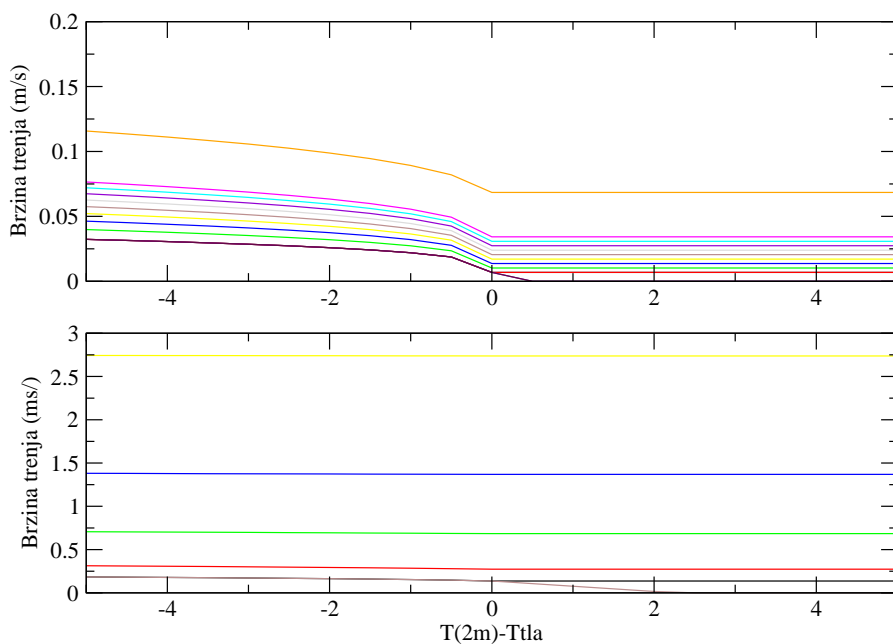
$$u_* = \frac{1}{C_1^m} \left[\Delta U - C \frac{\Delta \Theta}{\Delta U} \right] \quad (\text{B.33})$$

a za h :

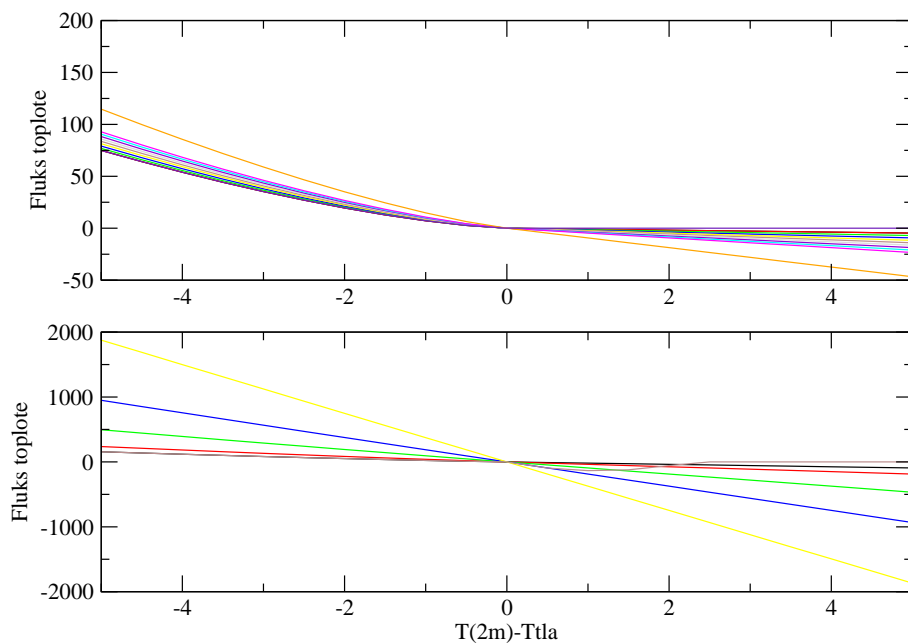
$$h = \frac{1}{C_1^m} \left[\Delta U - C \frac{\Delta \Theta}{\Delta U} \right] \frac{\Delta \Theta}{\Delta U} \quad (\text{B.34})$$

Na slici je dat grafički prikaz flukseva količine kretanja i toplote, za stabilan i nestabilan slučaj, računatih na osnovu Monin-Obuhov teorije. Visina na kojoj su zadavane vrednosti vetra i temperature je bila 2 metra. Za parametra z_{0m} je uzeta vrednost 0.1 m. dok je za z_{0h} uzeta vrednost 0.01 m.

Brzina trenja u nestabilnom i stabilnom režimu



Fluks toplote pri nestabilnom i stabilnom slučaju



Slika B.1: Fluksevi količine kretanja i toplote za nestabilan i stabilan režim za razne vrednosti vetra i razne vrednosti razlike temperature vazduha na visini od 2 m. i temperature tla. U oba slučaja gornji panel je za slabije vetrove a donji za jače vetrove.

Elementi tenzorske algebre

U ovom dodatku su dati, bolje reći pobrojani, neki pojmovi i elementi tenzorske algebre. Za detaljniji prikaz ove oblasti konsultovati neku od više knjiga iz ove oblasti.

C.1 Indeksna notacija

Upotrebom indeksne notacije tenzorske veličine se mogu veoma koncizno pisati. Naravno u opštem slučaju sve su veličine tenzori različitog reda, s tim što za tenzor nultog reda imamo specijalno ime, skalar

$$S = c \tag{C.1}$$

zatim za tenzor prvog reda imamo ime vektor. Skalari su veličine koje se karakterišu jednim brojem, vektori sa dva broja u slučaju dvodimenzionog prostora ili sa tri broja u slučaju trodimenzionog prostora, ali u oba slučaja je to jednoindeksna veličina

$$V = [v]_i \tag{C.2}$$

gde je indeks $i=1,2,..$ već koliko dimenzija ima prostor. Tenzor drugog reda je dvoindeksna veličina

$$T = [t]_{ij} \quad (C.3)$$

doke je tenzor trećeg reda troindeksna veličina

$$T = [t]_{ijk} \quad (C.4)$$

i tako dalje. Sve operacije sa skalarima (trivijalno), vektorima ili opšte rečeno tenzorima možemo napisati koristeći indeksnu notaciju. Kao prvi primer uzmimo skalarni proizvod dva vektora :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^3 a_i b_i \quad (C.5)$$

Kao drugi primer uzmimo advektivni član:

$$\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = v_1 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x_3} = \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x_i} \quad (C.6)$$

odnosno sam operator advekcije:

$$\mathbf{V} \cdot \nabla = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (C.7)$$

Uočavamo da kada god se pojavi isti indeks dva puta po njemu se vrši sumiranje tako da je to u stvari tzv. nemi indeks. Zato je usvojena konvencija da kad god se indeks pojavi dva puta u nekom monomu onda se podrazumeva sumiranje po tom indeksu ali se sam znak sume izostavlja.

Zbog česte upotrebe jediničnog tenzora uvedena je oznaka tzv. Koronekerova δ na sledeći način:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (C.8)$$

Primer gde se može koristiti Koronekerova δ -a je u sledećoj relaciji

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \delta_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (\text{C.9})$$

čime smo prešli sa diferenciranja po x_i na diferenciranje po x_k . Zbog ove relacije tenzor δ_{ik} se još naziva i zamenjujući tenzor.

Drugi često korišćen simbol je tzv. menjajući tenzor ili simbol Levi-Čivita (po Italijanskom matematičaru) koji je definisan na sledeći način:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & i = 1, \quad j = 2, \quad k = 3 & i \text{ sve cikl. perm.} \\ -1 & i = 1, \quad j = 2, \quad k = 3 & i \text{ sve cikl. perm.} \\ 0 & & \text{ostalo} \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

Na primer da bi se vektorski proizvod napisao u indeksnoj notaciji mora se koristiti ovaj simbol jer:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k \quad (\text{C.11})$$

Kao drugi primer relacije u kojoj se javlja tenzor ϵ_{ijk} možemo da navedemo razvoj determinante trećeg reda:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_1 & v_1 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} u_i v_j w_k \quad (\text{C.12})$$

C.2 Simetrični i antisimterični tenzori

Definicija

Simetričan tenzor je tenzor koji neće promeniti vrednost ako indeksi i i j zamene mesta. Ako pri zameni mesta indeksa i i j imamo promenu znaka kod odgovarajućih komponenti tada je to *antisimetričan* tenzor. Navedimo, bez dokaza, sledeću teoremu iz tenzorske algebre:

Teorema Svaki tenzor se može rastaviti na simetrični i antisimterični deo. Na primer

$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad (\text{C.13})$$

U prvoj zagradi je simetričan tenzor jer ako indeksi i i j zamene mesta vrednost izraza se neće promeniti. Ako se u drugoj zagradi uradi to isto vrednost izraza će da promeni znak tj. u pitanju je antisimetričan tenzor.

C.3 Izotropni tenzori

Definicija

Tenzor se naziva *izotropnim* ako mu sve komponente ostanu nepromenjene pri proizvoljnoj rotaciji koordinatnih osa.

Teorema

Svaki izotropni tenzor se može napisati kao linearna kombinacija izotropnog tenzora drugog reda.

Posledica ovoga je da su jedini izotropni tenzori neparnog reda trivijalni tenzori (svi elementi su nule).

Primer 1.

Opšti oblik tenzora drugog reda je:

$$\tau_{ij} = C \delta_{ij} \quad (\text{C.14})$$

Primer 2.

Opšti oblik tenzora četvrtog reda je:

$$\tau_{ijkl} = C_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + C_2 \delta_{ik} \delta_{jl} + C_3 \delta_{il} \delta_{jk} \quad (\text{C.15})$$

C.4 Vežbe

Zadatak 1

Dokazati:

$$\delta_{ij} = 3\delta_{ik} \cdot \epsilon_{ijk} = 0$$

Zadatak 2

Izračunati komponente tenzora šestog reda

$$\epsilon_{ijk} \cdot \epsilon_{lmk}$$

Zadatak 3

Dokazati:

$$\varepsilon_{ijk} \cdot \varepsilon_{ijk} = 2\delta_{ik}$$

Zadatak 4

Pokazati da tenzori δ_{ik} i ε_{ijk} ostaju invarijantni na rotacije koordinatnih osa.

Zadatak 5

Pokazati da je tenzor $\varepsilon_{ijk} \cdot \varepsilon_{lmk}$ izotropan.

Izvodjenje jednačine za turbulentnu kinetičku energiju

Polazimo od jednačina za trenutne vrednosti

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_k \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} + \varepsilon_{ilm} f_l u_m = - \frac{\partial}{\partial x_k} [\delta_{ik} \tilde{p}] - \delta_{i3} g_i \beta \tilde{\theta} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \tilde{u}_i \quad (\text{D.1})$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} + \tilde{u}_k \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x_k} = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \tilde{\theta} \quad (\text{D.2})$$

gde je sa \tilde{p} obeležen tzv. kinematički pritisak, količnik pritiska \tilde{p} i gustine ρ_0 . Ako sada rastavimo trenutnu vrednost \tilde{u}_i na srednju vrednost U_i i odstupanje od srednje vrednosti (fluktuacije) u_i

$$\tilde{u}_i = U_i + u_i \quad (\text{D.3})$$

i analogno ostale veličine, dobijamo :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + U_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \varepsilon_{ilm} f_l U_m + \varepsilon_{ilm} f_l u_m \\ & = - \frac{\partial}{\partial x_k} [\delta_{ik} P] - \frac{\partial}{\partial x_k} [\delta_{ik} p] - \delta_{i3} g_i \beta \Theta - \delta_{i3} g_i \beta \theta + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} U_i + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} u_i \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Ako sada primenimo operator osrednjavanja dobijamo:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} + \varepsilon_{ilm} f_l U_m = -\frac{\partial}{\partial x_k} [\delta_{ik} P] - \delta_{i3} g_i \beta \Theta + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2} \quad (\text{D.5})$$

Jednačine za fluktuacije dobijamo ako od (D.4) oduzmemo (D.5):

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \overline{u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} + \varepsilon_{ilm} f_l u_m = -\frac{\partial}{\partial x_k} [\delta_{ik} p] - \delta_{i3} g_i \beta \theta + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \quad (\text{D.6})$$

Ako sada ovo napišemo, ali za komponentu brzine sa indeksom j imamo

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + U_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \overline{u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + \varepsilon_{jlm} f_l u_m = -\frac{\partial}{\partial x_k} [\delta_{jk} p] - \delta_{j3} g_j \beta \theta + \nu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k^2} \quad (\text{D.7})$$

Pomnožimo sada (D.6) sa u_j a (D.7) sa u_i i potom ih saberimo. Tada se dobija:

$$\begin{aligned} & u_j \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_j U_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_i U_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + u_i u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + u_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \\ & - \overline{u_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} + u_i u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \overline{u_i u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + u_j \varepsilon_{ilm} f_l u_m + u_i \varepsilon_{jlm} f_l u_m \\ & = -u_j \frac{\partial}{\partial x_k} [\delta_{ik} p] - u_i \frac{\partial}{\partial x_k} [\delta_{jk} p] - \delta_{i3} g_i \beta \theta u_j - \delta_{j3} g_j \beta \theta u_i + \nu u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \nu u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k^2} \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Konačno ako uzmemo u obzir jednačinu kontinuiteta i pravilo o difrenciranju proizvoda možemo advektivni član da napišemo u fluksnom obliku. Tada prethodna realcija postaje:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} u_j u_i + U_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_j u_i + u_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_i u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_j u_i - \overline{u_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} - \overline{u_i u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} \\ & + u_j \varepsilon_{ilm} f_l u_m + u_i \varepsilon_{jlm} f_l u_m = -\frac{\partial}{\partial x_k} [\delta_{ik} p u_j] - \frac{\partial}{\partial x_k} [\delta_{jk} p u_i] + p \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \\ & - \delta_{i3} g_i \beta \theta u_j - \delta_{j3} g_j \beta \theta u_i - 2\nu \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \nu \frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_k^2} \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Konačno, nakon osrednjavanja, dobijamo jednačine za Rejnoldsove napone:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i u_j} + U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{\frac{\partial}{\partial x_k} u_j u_k u_i} + u_j \overline{\varepsilon_{ilm} f_l u_m} + u_i \overline{\varepsilon_{jlm} f_l u_m} \\
& = - \frac{\partial}{\partial x_k} [\delta_{ik} \overline{p u_j}] - \frac{\partial}{\partial x_k} [\delta_{jk} \overline{p u_i}] + p \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] - \delta_{i3} g_i \beta \overline{\theta u_j} - \delta_{j3} g_j \beta \overline{\theta u_i} \\
& - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \overline{u_i u_j}
\end{aligned} \tag{D.10}$$

Drugi deo izraza za viskozno trenje je mnogo manji od prvog jer je prostorni razmer srednjih veličina mnogo manji od prstornog razmera proizvoda fluktuacija. Prema odeljku *Prostorne i vremenske razmere kod homogene i izotropne turbulencije*, prostorni razmer fluktuacija je razmer Kolmogorovaa (η) a rzmern srednjih vrednosti je integralni razmer (L). Uzimajući ovo u obzir razmeri članovai koji se pojavljuju kod izraza za viskozno trenje iznose:

$$\overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} \approx \frac{q^2}{\eta^2} \tag{D.11}$$

i

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \overline{u_i u_j} \approx \frac{q^2}{L^2} \tag{D.12}$$

Ako sada označimo sa q^2 dvostruku vrednost turbulentne kinetičke energije, $q^2 = \overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}$, nakon kontrakcije indeksa i i j konačno dobijamo traženu relaciju:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} q^2 \right) + U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} q^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{2} \overline{u_k u_i^2} = - \frac{\partial}{\partial x_k} [\delta_{ik} \overline{p u_i}] - \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \delta_{i3} g_i \beta \overline{\theta u_i} - \nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}}} \tag{D.13}$$

Teorema $\overline{abc} \leq \sqrt{\overline{a^2} [\overline{b^2c^2} - \overline{bc}^2]}$

Teorema
Dokazati:

$$\overline{abc} \leq \sqrt{\overline{a^2} [\overline{b^2c^2} - \overline{bc}^2]} \quad (\text{E.1})$$

Dokaz
Prvo uočimo da za proizvoljnu srednju vrednost C važi:

$$\overline{abc} = \overline{a(bc + C)} \quad (\text{E.2})$$

Zaista:

$$\overline{a(bc + C)} = \overline{abc} + \overline{aC} = \overline{abc} + C\overline{a} = \overline{abc} \quad (\text{E.3})$$

Ako sada primenimo Švarc-ovu nejednakost:

$$\overline{f^2g^2} \geq \overline{fg}^2 \quad (\text{E.4})$$

na trostruku korelaciju dobijamo:

$$\overline{abc}^2 = \overline{a(bc+C)}^2 \leq \overline{a^2} \cdot \overline{(bc+C)^2} = \overline{a^2} [\overline{(bc)^2} + 2C\overline{bc} + C^2] \quad (\text{E.5})$$

Kako ovo važi za svaku srednju vrednost, važiće i za $C = -\overline{bc}$, a tada je

$$\boxed{\overline{abc}^2 \leq \overline{a^2} \cdot [\overline{b^2c^2} - \overline{bc}^2]} \quad (\text{E.6})$$

što je trebalo i dokazati.

Ergodiska teorema, jedan dovoljan uslov za njeno važenje

Da bi se definisao jedan dovoljan uslov za važenje Ergodiske teoreme prvo ćemo dokazati lemu:

Lema

Ako je $\tau = t'' - t'$ i $R(\tau)$ autokorelaciona funkcija za *stacionarnu* turbulenciju tada je:

$$\frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T R(\tau) dt' dt'' = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R(\tau) d\tau \quad (\text{F.1})$$

Dokaz

Ako uz

$$\tau = t'' - t' \quad (\text{F.2})$$

definišemo i

$$t = t'' + t' \quad (\text{F.3})$$

tada važi:

$$t = \tau + 2t' \quad (\text{F.4})$$

I obrnuto za tekuća vremena t' i t'' tada važi:

$$t' = \frac{t - \tau}{2} \quad (\text{F.5})$$

i

$$t'' = \frac{t + \tau}{2} \quad (\text{F.6})$$

Iz prethodnih relacija sledi da su $\tau = \text{const}$ linije:

$$t'' = \tau + t' \quad (\text{F.7})$$

dok su $t = \text{const}$ linije:

$$t'' = t - t' \quad (\text{F.8})$$

Ilustracija tih veza je data na sledećoj slici gde su prikazane linije $\tau = 0$, $\tau = \frac{T}{2}$ kao i linije $t = \frac{T}{2}$ i $t = T$. Ako sada smene definisane relacijama F.5 i F.6 zamenimo u

Slika F.1: Odnos dva koordinatana sistema (t' i t'' prema t , τ)

$$\frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T R(\tau) dt' dt'' \quad (\text{F.9})$$

dobićemo:

$$\frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T R(\tau) dt' dt'' = \frac{2}{T^2} \int_\tau^{2T-\tau} \int_0^T R(\tau) J_{trf} dt d\tau \quad (\text{F.10})$$

gde je J_{trf} jakobijan transformacije (t', t'') u (t, τ)

$$J_{trf} = \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial t''}{\partial \tau} + \frac{\partial t'}{\partial \tau} \frac{\partial t''}{\partial t} = \frac{1}{2} \quad (\text{F.11})$$

Tako dobijamo:

$$\frac{2}{T^2} \int_0^T \frac{1}{2} R(\tau) d\tau \int_0^{2T-\tau} dt = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R(\tau) d\tau \quad (\text{F.12})$$

čime je završen dokaz leme.

Ergodiska teorema tvrdi da:

$$\langle \tilde{u}^\alpha \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{u}^\alpha(t) dt = \bar{u} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \bar{u}^\alpha(t) \quad (\text{F.13})$$

gde je $\langle \tilde{u}^\alpha \rangle$ srednjak po vremenu a \bar{u} srednjak po ansamblu. Mi ćemo dokazati da pod određenim uslovima $\langle \tilde{u}^\alpha \rangle - \bar{u} \rightarrow 0$ ako $T \rightarrow +\infty$.

Dokaz

Ukoliko je interval merenja T konačan definišimo veličinu E^α kao:

$$E^\alpha = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{u}^\alpha(t) dt - \langle \tilde{u}^\alpha \rangle \quad (\text{F.14})$$

Šta je njen smisao? To je greška koja bi se napravila ako bi se srednja vrednost dobijena za konačno T proglasila srednjom vrednošću za neograničenu dužinu merenja. Prema njenoj definiciji je:

$$(E^\alpha)^2 = \left[\frac{1}{T} \int_0^T \tilde{u}^\alpha(t) dt - \langle \tilde{u}^\alpha \rangle \right]^2 \quad (\text{F.15})$$

Šta će se desiti sa $(E^\alpha)^2$ ako broj realizacija ansambla neograničeno raste? Ako izračunamo njen srednjak po ansamblu:

$$\overline{(E^\alpha)^2} = \overline{\left[\frac{1}{T} \int_0^T \tilde{u}^\alpha(t) dt - \langle \tilde{u}^\alpha \rangle \right]^2} \quad (\text{F.16})$$

Kako je $\tilde{u}^\alpha - \overline{u^\alpha} = u^\alpha$ odstupanje (fluktuacija), i pošto su operatori osrednjavanja i integriranja komutativni važi:

$$(E^\alpha)^2 = \frac{1}{T} \int_0^T dt' \int_0^T dt'' \overline{u(t')u(t'')} \quad (\text{F.17})$$

što, prema prethodno dokazanoj lemi, postaje:

$$(E^\alpha)^2 = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \overline{u(t)u(t+\tau)} d\tau \quad (\text{F.18})$$

Sada ako $T \rightarrow +\infty$ imamo sledeću procenu:

$$\overline{(E^\alpha)^2} \sim \frac{\overline{u^2} \Lambda_\tau}{T} \quad (\text{F.19})$$

koja odmah daje dovoljan uslov za $\overline{(E^\alpha)^2} \rightarrow 0$ a to je da je Λ_τ ograničeno jer tada ispunjeno:

$$T \rightarrow +\infty \quad ; \quad \langle \tilde{u}^\alpha \rangle - \overline{u} \rightarrow 0$$

Na kraju možemo dati jedan alternativni iskaz ergodiske teoreme, a to je iskaz da *jedan, veoma dugačak, vremenski niz možemo tretirati kao N realizacija istog eksperimenta.*

G

Businessk aproksimacije

Businessk aproksimacija polazi od ideje da se deo polja gustine koji je odgovoran za postojanje sile gradijenta pritiska, a time i kretanja, može smatrati kao poremećaj (perturbacija) osnovnog stanja. Uopšte za sve termodinamičke veličine pretpostanljamo:

$$\begin{aligned}\tilde{\rho} &= \rho_0 + \rho \\ \tilde{T} &= T_0 + T \\ \tilde{p} &= p_0 + p \\ \tilde{\theta} &= \theta_0 + \theta\end{aligned}\tag{G.1}$$

uz uslove

$$\begin{aligned}\rho_0 &\gg \rho \\ T_0 &\gg T \\ p_0 &\gg p \\ \theta_{0i} &\gg \theta\end{aligned}\tag{G.2}$$

Dalje, osnovno stanje se karakteriše odsustvom kretanja što znači da je horizontalna komponenta sile gradijenta pritiska nula, a u vertikalnom pravcu se uspostavlja hidrostatička ravnoteža. Dakle:

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial x}\tag{G.3}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial y} \quad (\text{G.4})$$

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial z} - g \quad (\text{G.5})$$

Termodinamičke veličine osnovnog stanja, kao jednog fizički mogućeg stanja, nezavisno zadovoljavaju jednačinu stanja:

$$p_0 = R\rho_0 T_0 \quad (\text{G.6})$$

a definicija potencijalne temperature daje:

$$\theta_0 = T_0 \left(\frac{p_{00}}{p_0} \right)^\kappa \quad (\text{G.7})$$

Zbog uslova (G.5) izvršićemo linearizaciju termodinamičkih relacija, jednačine stanja i relacije za potencijalnu temperaturu. Tada jednačina stanja postaje:

$$p_0 + p = R(\rho_0 + \rho)(T_0 + T) \quad (\text{G.8})$$

a zbog (G.6) važi:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{T}{T_0} \quad (\text{G.9})$$

i analogno relacija za potencijalnu temperaturu postaje:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T}{T_0} - \kappa \frac{p}{p_0} \quad (\text{G.10})$$

Eliminacijom odnosa T/T_0 dobijamo

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{\rho}{\rho_0} - (1 - \kappa) \frac{p}{p_0} \quad (\text{G.11})$$

Drugi član na desnoj strani je mnogo manji od prvog tako da se dobija relacija izmedju θ/θ_0 i ρ/ρ_0

$$\frac{\theta}{\theta_0} \simeq -\frac{\rho}{\rho_0} \quad (\text{G.12})$$

Izvršimo sada linearizaciju treće jednačine kretanja tako što u jednačini:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \dots = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (\text{G.13})$$

razložimo ρ i p . Ako se zanemare članovi višeg reda koji potiču od razvoja izraza $1/(\rho_0 + \rho)$ u red, za desnu stranu se dobija:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g \simeq \frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) \left(\frac{\partial p_0}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z}\right) + g \quad (\text{G.14})$$

ili

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{1}{\rho_0} - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho}{\rho_0} + g \quad (\text{G.15})$$

Konačno, kada uzmemo u obzir jednačinu stanja i hidrostatičku relaciju za osnovno stanje i zanemarimo proizvod odstupanja od osnovnog stanja, preposlednji član u prethodnoj relaciji, dobijamo:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + g \frac{\rho}{\rho_0} \quad (\text{G.16})$$

koja zbog relacije (G.12) dobija konačan oblik

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g \frac{\theta}{\theta_0} \quad (\text{G.17})$$

Razlog zašto je ostao član koji je srazmeran poremećenju, ρ/ρ_0 odnosno θ/θ_0 , je što se on javlja kao deo proizvoda čiji je drugi produkt g . Kako g ne postoji u prve dve komponente jednačina kretanja tako nema ni člana ρ/ρ_0 i zato se sreće i sledeća definicija Businessk aproksimacije: *Businessk aproksimacija znači zanemariti odstupanja gustine od gustine osnovnog stanja sem kada je odstupanje pomnoženo sa g* . Na kraju napišimo deo sistema jednačina kretanja koji ilustruje Businessk aproksimaciju:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \dots = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{G.18})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \dots = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (\text{G.19})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \dots = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + g \frac{\theta}{\theta_0} \quad (\text{G.20})$$

Osnovi dimenzionalne analize

H.1 Uvod

U nekim oblastima dinamičke meteorologije - ovde naročito imamo u vidu procese u prizemnom sloju atmosfere dakle upravo u mikrometeorologiji- često ne možemo polazeći od fundamentalnih jednačina hidrodinamike da dobijemo zakone koji opisuju pojave ili veličinu koja nas interesuje. Tada smo prinudjeni da veću pažnju poklonimo eksperimentalnim metodama. Pri tome je često od velike koristi korišćenje metoda dimenzionalne analize; njime se može prethodno dobiti dosta informacija o dopustivom funkcionalnom obliku medjusobne zavisnosti posmatranih veličina. Ovakva analiza se obavlja jednostavno i bez mnogo napora. Pored toga, rezultati ove analize već i sami za sebe mogu da budu veoma poučni, a obično mnogo olakšavaju kasniji eksperimentalni zadatak. Osnovi metoda dimenzionalne analize će se u ovoj glavi nešto detaljnije prikazati i daće se nekoliko jednostavnih primera.

H.2 Dimenzionalne i bezdimenzionalne veličine

Fizičke veličine, koje posmatramo u fizici i u dinamičkoj meteorologiji, izražavaju se jednim ili sa više brojeva. Npr. temperatura se izražava jednim brojem; brzina, posmatrana kao vektor, sa tri broja, itd. Ako ovaj broj ili brojevi zavise od mernih jedinica izabranih prilikom merenja te veličine,

ona se naziva dimenzionalnom. Uz broj je tada uvek potrebno još i reći u kojim mernim jedinicama je posmatrana brojna vrednost data. Npr. odstojanje dve tačke može da iznosi 2,3 metra, ili 2,3 m. Da je kao jedinica za merenje dužine bio ovde usvojen santimetar, *brojna vrednost* posmatranog odstojanja bi bila drukčija. Veličine čija brojna vrednost, naprotiv, ne zavisi od izbora mernih jedinica, nazivaju se bezdimenzionalnim. Npr. ako ugao α definišemo kao odnos dužine luka s i odstojanja r , tj.

$$\alpha = \frac{s}{r} \quad (\text{H.1})$$

ugao α će da bude bezdimenzionalna veličina. Njegova brojna vrednost ne zavisi od izbora jedinice za merenje dužine luka i odstojanja i posle brojne vrednosti ugla α , npr. 0,12 nije potrebno reći koje merne jedinice su tu korišćene. Brojna vrednost posmatranog ugla je ista bez obzira da li dužinu luka i odstojanje merimo u metrima ili santimetrima. Nije teško uvideti da veličine postaju dimenzionalne ili bezdimenzionalne u stvari samo kao posledica dogovora, tj. usvojene definicije. Mogli smo usvojiti drukčiju definiciju ugla, po kojoj bi se uglovi merili stepenima ili brojem nekih drugih, većih uglova, npr. pravih. Tada bi ugao bio dimenzionalna veličina i njegova brojna vrednost bi zavisila od izbora jedinica za merenje. Isto tako, mi smo se mogli dogovoriti da je dužina, po definiciji, uvek odnos posmatrane dužine i neke druge uvek iste jedinice za dužinu, npr. dužine od 1 metar. Tada bi dužina bila bezdimenzionalna veličina. Prema tome, pojmovi dimenzionalnih i bezdimenzionalnih veličina su relativni, tj. odnose se uvek na prethodno usvojen dogovor o definiciji tih veličina.

H.3 Osnovne i izvedene veličine

Razne fizičke veličine su medjusobno povezane definicijama ili zakonima u obliku jednačina. Zbog toga nije potrebno, a ni pogodno nezavisno definisati jedinice za merenje svih veličina; svaka od fizičkih jednačina se može iskoristiti za definisanje jedinice za merenje jedne od veličina, nakon što su utvrđene jedinice za merenje preostalih veličina u toj jednačini. Npr. standardni postupak je da se definicija brzine

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (\text{H.2})$$

nakon što se definišu jedinice za merenje dužine (predjenog puta s) i vremena t , koristi istovremeno i za definisanje jedinice za merenje brzine: to je brzina kojom se predjeni put povećava za jedinicu dužine po jedinici vremena. Kada je ovako utvrđena jedinica za brzinu, definicija ubrzanja se na analogan način koristi za definisanje jedinice za ubrzanje. Posle ovoga se, ako se još definiše i jedinica za masu,

prvi Njutnov zakon može koristiti za definisanje jedinice za silu. Na ovaj način se, polazeći od nekoliko u početku usvojenih nezavisnih mernih jedinica, mogu pogodnim redosledom definisati jedinice za merenje svih ostalih veličina.

Veličine čije se merne jedinice pri ovakvom postupku u početku nezavisno definišu i kasnije koriste za definisanje jedinica za merenje drugih veličina, nazivaju se *osnovne veličine*. Veličine čije se merne jedinice definišu koristeći zavisnost tih veličina od osnovnih, nazivaju se *izvedene veličine*.

U mehanici je uobičajen izbor tri osnovne veličine. U tzv. fizičkom sistemu veličina za ove osnovne veličine uzimaju se dužina, masa i vreme, simbolički označeno L, M i T . Nakon izbora osnovnih veličina, još uvek se mogu proizvoljno izabrati osnovne merne jedinice za te veličine. Skup takvih osnovnih i od njih izvedenih jedinica zove se sistem jedinica. Npr. u CGS sistemu jedinica osnovne merne jedinice za dužinu, masu i vreme su santimetar, gram i sekunda. U internacionalnom sistemu jedinica, skraćeno SI, osnovne jedinice su metar, kilogram i sekunda. Drugi izbor osnovnih veličina se vrši u tzv. tehničkom sistemu veličina, gde se za osnovne veličine uzimaju dužina, sila (K) i vreme, sa osnovnim mernim jedinicama metar, kilogram težine i sekunda; ovaj sistem jedinica naziva se MKS sistem. Moguće je, naravno, definisati i druge sisteme osnovnih veličina i mernih jedinica.

Ako se promeni izbor merne jedinice za neku osnovnu veličinu, promeniće se i brojna vrednost koju u nekom odredjenom slučaju ima ta veličina i eventualno i brojne vrednosti drugih veličina koje od te osnovne veličine zavise. Npr., ako se izabere c puta manja merna jedinica za dužinu, brojna vrednost odstojanja r , između dve tačke, će se uvećati cr puta. Brojne vrednosti drugih veličina mogu se pri tome menjati i na komplikovaniji način. Razmotrimo opšti slučaj gde se istovremeno mogu promeniti merne jedinice svih osnovnih veličina. Uzmimo da smo se opredelili za izbor osnovnih veličina a_1, a_2, \dots, a_k sa simboličkim oznakama A_1, A_2, \dots, A_k . Posmatrajmo neku veličinu a , koja može da zavisi od tih osnovnih i drugih izvedenih veličina

$$a = a(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) \quad (\text{H.3})$$

Izaberimo sada nove jedinice za osnovne veličine, i to takve da u njima vrednosti veličina a_1, a_2, \dots, a_k iznose $\alpha_1 a_1, \alpha_2 a_2, \dots, \alpha_k a_k$. Ako pri tome veličina a dobije vrednost:

$$a(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = \alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2} \dots \alpha_k^{n_k} a(1, 1, \dots, 1) \quad (\text{H.4})$$

gde su n_1, n_2, \dots, n_k neke konstante, kaže se da veličina a ima "dimenzije"

$$A_1^{n_1} A_2^{n_2} \dots A_k^{n_k} \quad (\text{H.5})$$

Prema Maksvelu, dimenzija se može napisati i u obliku:

$$[a] = A_1^{n_1} A_2^{n_2} \cdots A_k^{n_k} \quad (\text{H.6})$$

Uglaste zgrade se ovde čitaju "dimenzije od"; ako se smatra da to neće dovesti do zabune uglaste zgrade se mogu i izostaviti.

Uočimo da ova definicija pojma dimenzija dozvoljava ne samo mogućnost da faktori α budu čiste brojne vrednosti, već i mogućnost da su nove jedinice takve da se veličine a_1, a_2, \dots, a_k pretvaraju iz dimenzionalnih u bezdimenzionalne i obrnuto. Npr. moguć je izbor novih jedinica za dužinu kao što je opisano u primeru na kraju prošlog odeljka, gde se dužina definiše kao odnos prvobitno posmatrane dimenzionalne dužine, recimo a , i dužine od 1 metar. Tada bi nova dužina $a/(1m)$ predstavljala bezdimenzionalnu veličinu i ako su npr. prvobitne merne jedinice za dužinu bile santimetri, faktor bi imao vrednost 1/100 cm. Mogućnost ovakvog izbora konstanti će biti kasnije korišćena.

Dimenzije osnovnih veličina su očigledne iz definicije pojma dimenzija. Dimenzije izvedenih veličina se mogu ustanoviti iz njihovih definicija ili drugih jednačina u kojima se one javljaju. Npr. iz definicije brzine, analiziranjem posledica smanjenja jedinica za dužinu i vreme uvidjamo da brzina v ima dimenzije LT^{-1} . Razmatranja ove vrste pokazuju da se dimenzije nekog člana fizičke jednačine mogu algebarski izračunavati iz dimenzija veličina od kojih je ovaj član sastavljen. Zatim, pošto oblik fizičkih jednačina ne sme da zavisi od izbora mernih jedinica za osnovne veličine, uvidjamo da dimenzije svakog člana (tj. sabirka) neke fizičke jednačine moraju da budu jednake; jedino tako će se vrednosti pojedinih članova pri promeni jedinica menjati na isti način. Ovo je "princip dimenzionalne homogenosti" fizičkih jednačina, postavljen od strane Furijea.

U mehanici se, kao što je rečeno, obično koriste tri osnovne veličine. Ovaj izbor broja od tri osnovne veličine, međjutim, nije neophodan već se čini iz praktičnih razloga. Umesto tri moglo bi se odabrati i više osnovnih veličina. Npr. sila bi mogla da bude definisana kao osnovna veličina nezavisno od prvog Njutnovog zakona, recimo kao sposobnost za proizvodnju kretanja a jedinica za silu onda eksperimentalno definisana nekim etalomom, npr. koristeći elastičnost nekog, uvek istog materijala. Prvi Njutnov zakon bi tada ustanovio da uvek postoji srazmernost između sile i proizvoda mase i ubrzanja, tj. on bi morao da bude napisan u obliku

$$F = c m a \quad (\text{H.7})$$

gde je F sila, m masa, a ubrzanje, i c konstanta koja bi imala dimenzije

$$[c] = K \frac{T^2}{ML} \quad (\text{H.8})$$

gde je K dimenzionalni simbol za silu. Brojna vrednost dimenzionalne konstante c , pri nezavisnoj definiciji jedinice za silu, gotovo sigurno ne bi bila jednaka jedinici. Mogle bi se, na analogan način, definisati i druge nove osnovne veličine. Svako povećanje broja osnovnih veličina, međutim, zahtevalo bi uvođenje po jedne nove univerzalne dimenzionalne konstante, kao što je bio slučaj u gornjem primeru. Kao što je, po cenu zavodjenja po jedne nove univerzalne dimenzionalne konstante, bilo moguće povećavati za po jednu broj osnovnih veličina, tako isto se može i smanjivati broj osnovnih veličina eliminisanjem postojećih univerzalnih dimenzionalnih konstanti. U tom smislu, npr. možemo iskoristiti Njutnov zakon gravitacije

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (\text{H.9})$$

gde je F intenzitet sile kojom se privlače mase m_1 i m_2 kada se nalaze na odstojanju r , a γ univerzalna konstanta. U uobičajenom fizičkom sistemu veličina ona ima dimenzije

$$[\gamma] = M^{-1} L^3 T^{-2} \quad (\text{H.10})$$

Umesto što nezavisno definišemo jedinice za dužinu, masu i vreme, mogli bi da nezavisno definišemo samo jedinice za dužinu i vreme, a da iskoristimo ovaj zakon za definiciju mase. U tom slučaju bi zakon gravitacije napisali u obliku

$$F = \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (\text{H.11})$$

tj. izostavili bi univerzalnu dimenzionalnu konstantu γ . Uz $F = m_1 a_1$ (ili $m_2 a_2$) jedinica mase bi tada bila ona koja istu toliku masu, udaljenu za jedinicu odstojanja, privlači toliko da rezultujuće ubrzanje daje, po jedinici vremena, promenu brzine od jedinice dužine po jedinici vremena. Masa bi u takvom sistemu imala dimenzije

$$[m] = L^3 T^{-2} \quad (\text{H.12})$$

I druge univerzalne dimenzionalne konstante bi smo mogli iskoristiti za dalje smanjenje broja osnovnih veličina. Ovakve konstante su npr. brzina svetlosti u vakuumu i kinematička viskoznost vode. Ovim putem mogao bi se dobiti sistem bez osnovnih veličina i prema tome nezavisan od proizvoljnih definicija mernih jedinica. U ovakvom sistemu jedinice svih veličina bile bi određene raznim apsolutnim fizičkim konstantama i sve bi veličine bile bezdimenzionalne. I pored izvesnih prednosti, nezavisnosti od proizvoljnih mernih etalona i estetske dopadljivosti, nema mnogo izgleda da će upotreba ovakvog

sistema postati uobičajena. Veliki broj mehaničkih procesa nije ni u kakvoj vezi sa univerzalnim konstantama koje bi tu služile za definisanje jedinica, pa bi jedinice sistema bez osnovnih veličina često imale veštački karakter. Kod sistema sa osnovnim veličinama je pogodno što postoji mogućnost izbora raznih osnovnih jedinica u raznim oblastima fizike. Najzad, dimenzionalnost fizičkih veličina, kao što će se videti, se može iskoristiti za izvodjenje raznih korisnih zaključaka putem jednostavne analize zasnovane na dimenzijama posmatranih veličina.

H.4 Dimenzije fizičkih veličina

Pokazaćemo u ovom odeljku da svaka fizička veličina ima dimenzije u obliku (H.6) tj. u obliku proizvoda stepenovanih dimenzija osnovnih veličina. Ovo, kako ćemo videti, obavezno sledi iz zahteva da odnos dve brojne vrednosti neke fizičke veličine ne sme da zavisi od izbora jedinica za merenje osnovnih veličina. Npr. bez obzira da li se kao osnovna jedinica za dužinu izabere santimetar ili metar, zahtevamo da odnos brojnih vrednosti dveju površina bude jednak.

Posmatrajmo neku fizičku veličinu a ; radi kratkoće pisanja pretpostavimo da je ona funkcija dveju osnovnih veličina x i y , putem zavisnosti od promenljivih x_1, x_2, \dots, x_l i y_1, y_2, \dots, y_m .

$$a = f(x_1, \dots, x_l; y_1, \dots, y_m) \quad (\text{H.13})$$

Npr. veličine x_1, x_2, \dots, x_l mogu da budu neke dužine, a veličine y_1, y_2, \dots, y_m neka vremena, dužine itd. Uočimo da je u (H.13) uključena i mogućnost zavisnosti od veličina izvedenih polazeći od osnovnih veličina x i y , jer je svaka takva izvedena veličina funkcija izvesnog broja promenljivih, x_i i y_i . Razmatranje koje sledi se konceptualno ništa ne menja u slučaju da veličina a zavisi od proizvoljnog broja osnovnih veličina. Označimo sa a' vrednost koju veličina a ima kada promenljive x i y imaju neke druge vrednosti x' i y' , tj.

$$a' = f(x'_1, \dots, x'_l; y'_1, \dots, y'_m) \quad (\text{H.14})$$

Ako sada izaberemo nove jedinice za osnovne veličine i to takve da u novim jedinicama veličine x i y dobiju vrednosti αx i βy , odnos a'/a , kako smo istakli, ne sme da se promeni. Prema tome,

$$\frac{a'}{a} = \frac{f(x'_1, \dots, x'_l; y'_1, \dots, y'_m)}{f(x_1, \dots, x_l; y_1, \dots, y_m)} = \frac{f(\alpha x'_1, \dots, \alpha x'_l; \beta y'_1, \dots, \beta y'_m)}{f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_l; \beta y_1, \dots, \beta y_m)} \quad (\text{H.15})$$

Odavde dobijamo

$$\frac{a'(\alpha; \beta)}{a'(1, 1)} = \frac{a(\alpha; \beta)}{a(1, 1)} = \varphi(\alpha; \beta) \quad (\text{H.16})$$

jer je posmatrani količnik, očigledno, nezavisan od posebnog izbora vrednosti promenljivih x_i i y_i pa može samo da bude neka funkcija faktora α i β . Poređenje rezultata (H.16) sa (H.6) pokazuje da bi moglo biti korisno da pokušamo ustanoviti oblik funkcije. U tom cilju napišimo (H.16) za slučaj kada faktori α_1 i β_1 imaju neke druge vrednosti tj.

$$\frac{a(\alpha_1, \beta_1)}{a(1, 1)} = \varphi(\alpha_1, \beta_1) \quad (\text{H.17})$$

Deljenjem (H.16) sa (H.17) dobijamo

$$\frac{\varphi(\alpha, \beta)}{\varphi(\alpha_1, \beta_1)} = \frac{a(\alpha, \beta)}{a(\alpha_1, \beta_1)} \quad (\text{H.18})$$

Desnu stranu možemo svesti na izraze kao (H.16). Naime, kada u količniku na desnoj strani eliminišemo x_i i y_i definicijama

$$\alpha_i x_i = x_i'', \beta_i y_i = y_i'' \quad (\text{H.19})$$

dobijamo koristeći (H.16)

$$\frac{a(\alpha, \beta)}{a(\alpha_1, \beta_1)} = \frac{a''(\frac{\alpha}{\alpha_1}, \frac{\beta}{\beta_1})}{a''(1, 1)} = \varphi(\frac{\alpha}{\alpha_1}, \frac{\beta}{\beta_1}) \quad (\text{H.20})$$

Iz (H.18) i (H.20) imamo

$$\frac{\varphi(\alpha, \beta)}{\varphi(\alpha_1, \beta_1)} = \varphi(\frac{\alpha}{\alpha_1}, \frac{\beta}{\beta_1}) \quad (\text{H.21})$$

Kada, pri nekim određenim vrednostima α_1 i β_1 , uzmemo totalni diferencijal leve i desne strane ove jednačine, dobijamo

$$\frac{d\varphi(\alpha, \beta)}{\varphi(\alpha_1, \beta_1)} = \frac{\partial\varphi(\alpha/\alpha_1, \beta_1/\beta)}{\partial(\alpha/\alpha_1)} \frac{d\alpha}{\alpha_1} + \frac{\partial\varphi(\alpha/\alpha_1, \beta_1/\beta)}{\partial(\beta_1/\beta)} \frac{d\beta}{\beta_1} \quad (\text{H.22})$$

Pošto su α_1 i β_1 , proizvoljni, možemo ovde izvršiti granični prelaz $\alpha_1 \rightarrow \alpha$ i $\beta_1 \rightarrow \beta$. Ako uvedemo oznake

$$\lim_{\alpha_1 \rightarrow \alpha, \beta_1 \rightarrow \beta} \frac{\partial \phi \left(\frac{\alpha}{\alpha_1}, \frac{\beta}{\beta_1} \right)}{\partial \left(\frac{\alpha}{\alpha_1} \right)} = p \quad (\text{H.23})$$

i

$$\lim_{\alpha_1 \rightarrow \alpha, \beta_1 \rightarrow \beta} \frac{\partial \phi \left(\frac{\alpha}{\alpha_1}, \frac{\beta}{\beta_1} \right)}{\partial \left(\frac{\beta}{\beta_1} \right)} = q \quad (\text{H.24})$$

dobijamo tada

$$\frac{d\phi(\alpha, \beta)}{\phi(\alpha_1, \beta_1)} = p \frac{d\alpha}{\alpha_1} + q \frac{d\beta}{\beta_1} \quad (\text{H.25})$$

Odavde, nakon integrisanja, dolazimo do

$$\ln \phi = p \ln \alpha + q \ln \beta + c \quad (\text{H.26})$$

Pošto je, prema (H.14), za $\alpha = \beta = 1$, $\phi = 1$, vidimo da je $C = 0$. Tako za oblik funkcije dobijamo:

$$\phi = \alpha^p \beta^q \quad (\text{H.27})$$

Ovaj rezultat možemo, opet prema (H.14), napisati u obliku

$$a(\alpha, \beta) = \alpha^p \beta^q a(1, 1) \quad (\text{H.28})$$

Za slučaj da veličina a zavisi od proizvoljnog broja osnovnih veličina a_1, a_2, \dots, a_k na isti način vidimo da, kada osnovne veličine izborom novih jedinica dobiju vrednosti $\alpha_1 a_1, \alpha_2 a_2, \dots, \alpha_k a_k$ veličina a dobije i vrednost

$$a(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = \alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2} \cdots \alpha_k^{n_k} a(1, 1, \dots, 1) \quad (\text{H.29})$$

gde su n_1, n_2, \dots, n_k neke konstante. Prema tome, svaka fizička veličina ima, kao što smo želeli pokazati, dimenzije u obliku *proizvoda stepenovanih* dimenzija osnovnih veličina.

H.5 II teorema

Fizički zakoni, može sa uopšte reći, predstavljaju funkcionalne zavisnosti raznih veličina. Brojne vrednosti tih veličina i članova koji su od njih formirani obično zavise od izbora jedinica za osnovne veličine, a ovaj izbor je, kao što smo videli, proizvoljan. Možemo, zato, očekivati da je za neke svrhe poželjno da se fizički zakoni, ako je to moguće učiniti, napišu u obliku u kome brojne vrednosti pojedinih članova ne zavise od izbora jedinica za osnovne veličine.

Da bi smo razmotrili situaciju u tom pogledu, posmatrajmo dimenzionalnu veličinu a , koja je funkcija dimenzionalnih veličina a_1, a_2, \dots, a_n

$$a = f(a_1, a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) \tag{H.30}$$

Smatraćemo da (H.30) opisuju neki fizički zakon, što će da se ogleda u zahtevu da data funkcionalna zavisnost ne sme da zavisi od izbora mernih jedinica za posmatrane veličme. Drugim rečima, u svakom sistemu jedinica oblik funkcije f mora da bude isti.

Neka od dimenzionalnih veličina a_1, a_2, \dots, a_n njih k imaju nezavisne dimenzije; smatramo da nezavisne dimenzije imaju veličine kod kojih se dimenzije nijedne od veličina ne mogu formirati množenjem i stepenovanjem iz dimenzija preostalih veličina. Broj veličina sa nezavisnim očigledno mora da bude manji ili jednak broju osnovnih veličina. Uzmimo još i da smo u (H.30) veličine a_1, a_2, \dots, a_n poredjali tako da su dimenzije prvih k veličina, a_1, a_2, \dots, a_k nezavisne. Prema tome, dimenzije veličina a_1, a_2, \dots, a_n mogu se izraziti pomoću dimenzija veličina a_1, a_2, \dots, a_k

Izaberimo veličine a_1, a_2, \dots, a_k za osnovne veličine i uvedimo za njihove dimenzije oznake

$$[a_1] = [A_1], [a_2] = [A_2], \dots, [a_k] = [A_k] \tag{H.31}$$

Dimenzije ostalih veličina tada možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} [a_1] &= A_1^{m_1} A_2^{m_2} A_k^{m_k} \\ [a_{k+1}] &= A_1^{p_1} A_2^{p_2} A_k^{p_k} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \end{aligned} \tag{H.32}$$

$$[a_n] = A_1^{q_1} A_2^{q_2} A_k^{q_k}$$

gde su $m_1, m_2, \dots, m_k, \dots, q_1, q_2, \dots, q_k$ konstante. Izaberimo sada nove merne jedinice za osnovne veličine a_1, a_2, \dots, a_k i to takve da u novim mernim jedinicama vrednosti veličina a_1, a_2, \dots, a_k iznose

$$a'_1 = \alpha_1 a_1, a'_2 = \alpha_2 a_2, \dots, a'_k = \alpha_k a_k \quad (\text{H.33})$$

Time se, istovremeno, promene i vrednosti izvedenih veličina a_{k+1}, \dots, a_n prema (H.29) i (H.32) one su sada

$$\begin{aligned} a' &= \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_k^{m_k} a \\ a'_{k+1} &= \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \dots \alpha_k^{p_k} a_{k+1} \\ a'_n &= \alpha_1^{q_1} \alpha_2^{q_2} \dots \alpha_k^{q_k} a \end{aligned} \quad (\text{H.34})$$

Oblik funkcije f , međutim, kao što smo u početku istakli, ne sme da se promeni zbog izbora novih jedinica za osnovne veličine, tj.

$$a' = f(\alpha_1 a_1, \alpha_2 a_2, \dots, \alpha_k a_k, \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \dots \alpha_k^{p_k} a_{k+1}, \dots, \alpha_1^{q_1} \alpha_2^{q_2} \dots \alpha_k^{q_k} a_n) \quad (\text{H.35})$$

Uočimo da smo ovim, na desnim stranama prve jednačine (H.33) i (H.35) dobili formalno različite izraze za a' ; ovo možemo iskoristiti za dovodjenje posmatrane jednačine na bezdimenzionalan oblik. Naime, faktori $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ su proizvoljni. Mi ih možemo izabrati tako da je

$$\alpha_1 = \frac{1}{a_1}, \alpha_2 = \frac{1}{a_2}, \dots, \alpha_k = \frac{1}{a_k} \quad (\text{H.36})$$

čime sve osnovne veličine postaju bezdimenzionalne, pa se a' i svi argumenti funkcije f u (H.35) dovode u bezdimenzionalan oblik. Ovde se pretpostavlja da ni jedna od veličina a_1, a_2, \dots, a_k nije jednaka nuli.

Posmatrajmo uticaj izbora (H.36) na osnovne veličine, u novim jedinicama, a_1, a_2, \dots, a_k . Ako je npr. veličina a neka dužina (tada ni jedna od preostalih osnovnih veličina, a_2, \dots, a_k nije dužina), mi sa (H.36) definišemo da se sve dužine mere kao odnos posmatrane dužine i dužine koju u datom slučaju ima veličina a_1 . Na taj način veličina a'_1 , kao odnos dve iste dužine, postaje uvek bezdimenzionalna jedinica. Isto se dogodi i sa argumentima a'_1, a'_2, \dots, a'_k tj. svih prvih k argumenata u (H.36) postaju uvek bezdimenzionalne jedinice. Za veličinu a' i za preostale argumente a'_{k+1}, \dots, a'_n , dovedene u bezdimenzionalan oblik, uvešćemo oznake

$$\Pi = \frac{a}{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_k^{m_k}} \quad (\text{H.37})$$

$$\Pi_1 = \frac{a_{k+1}}{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_k^{p_k}} \quad (\text{H.38})$$

.

.

.

$$\Pi_{n-k} = \frac{a_n}{a_1^{q_1} a_2^{q_2} \cdots a_k^{q_k}} \quad (\text{H.39})$$

Vrednosti bezdimenzionalnih veličina $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}$ očigledno, ne zavise više od početnih mernih jedinica za osnovne veličine a_2, \dots, a_k . Uz uvedene oznake, (H.35) se može napisati u obliku

$$\Pi = f(1, 1, \dots, 1, \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}) \quad (\text{H.40})$$

Prema tome, veza između $n + 1$ dimenzionalne veličine a'_1, a'_2, \dots, a'_n od kojih k imaju nezavisne dimenzije, kada se dovede u oblik u kome su svi članovi nezavisni od izbora sistema jedinica, predje uvezu između $n + 1$ bezdimenzionalne kombinacije formira od $n + 1$ dimenzionalne veličine. Ovaj opšti zakon se naziva Π teorema ili Bakingamova teorema. Teoremu (H.40) možemo, naravno, napisati u obliku

$$a = a_1^{m_1} a_2^{m_2} \cdots a_k^{m_k} F(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}) \quad (\text{H.41})$$

što, kako ćemo videti, neposrednije ilustruje uobičajen način praktične primene dobijenog rezultata.

H.6 Primena Π teoreme

Saznanje da se svaka fizička jednačina može napisati u obliku (H.41) možemo koristiti za dobijanje informacija o mogućem obliku fizičkih jednačina u slučajevima kada te jednačine ne znamo kao posledicu fundamentalnih i poznatih fizičkih zakona. Tada je potrebno da na osnovu razmatranja fizičke prirode posmatranog procesa, pa i na osnovu intuicije, izaberemo fizičke veličine od kojih smatramo da bi trebalo da zavisi veličina koja nas interesuje. Analizom dimenzija ovih veličina možemo tada, ako je njihov izbor bio uspešan, da nadujemo faktor $\alpha_1^{m_1}, \alpha_2^{m_2}, \dots, \alpha_k^{m_k}$ i ako je $n > k$, bezdimenzionalne kombinacije $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}$. Tako se mogu dobiti veoma korisna obaveštenja o traženoj fizičkoj zavisnosti, koja olakšavaju kasniji eksperimentalni zadatak. Ilustrovaćemo ovo sa dva jednostavna primera.

Slobodan pad. Zamislamo da ne znamo da je predjeni put s kod slobodnog pada, pod dejstvom ubrzanja zemljine teže intenziteta g , dat sa

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \quad (\text{H.42})$$

i da smo prisiljeni da zakon koji opisuje s u funkciji vremena i drugih veličina tražimo dimenzionalnom analizom i eksperimentalnim putem. Tada prvo treba da napravimo listu veličina za koje smatramo da mogu da utiču na s . Recimo da živimo pre Galileia i da u takve veličine, pored g i t , uvrstimo još i masu tela m . Prema tome, tražimo

$$s = f(g, t, m) \quad (\text{H.43})$$

Posmatrane veličine imaju sledeće dimenzije: Od tri veličine koje smo uzeli za argumente funkcije

Veličina:	s	g	t	m
Dimenzije:	L	LT^2	T	M

Tabela H.1: Tabela dimenzija veličina za koje smo pretpostavili da učestvuju u zakonu za slobodno padanje

(H.43) sve tri vidimo imaju nezavisne dimenzije, tj. $n = k = 3$. Tako, funkcija f u nema argumenata i može samo da bude jednaka nekoj bezdimenzionalnoj konstanti. Dakle

$$s = Cg^a t^b m^c \quad (\text{H.44})$$

gde je C ta bezdimenzionalna konstanta. Zahtev za dimenzionalnom homogenošću daje odavde dimenzionalnu jednačinu

$$L = (LT^{-2})^a T^b M^c \quad (\text{H.45})$$

Iz nje dobijamo sistem od tri jednačine za konstante a, b i c , čija su rešenja:

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 0. \quad (\text{H.46})$$

Tako zaključujemo da s ne zavisi od mase i da je

$$\varphi = \varphi_0 \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t \quad (\text{H.47})$$

Ovoliko se moglo postići dimenzionalnom analizom; konstantu C sada treba odrediti eksperimentalnim putem. Ovo je, očigledno, daleko lakši zadatak nego što bi bio eksperimentalno traženje funkcije f u (H.43).

Matematičko klatno. Zamislamo opet da ne znamo da je ugao ϕ koji matematičko klatno dužine l i mase m , formira sa pravcem vertikale, dat sa

$$\phi = F\left(\phi_0, \sqrt{\frac{g}{l}}t\right) \quad (\text{H.48})$$

pri čemu je ϕ_0 maksimalna vrednost ugla ϕ , a vreme se računa od momenta prolaska klatna kroz vertikalni položaj. Ugledajući se na postupak iz prošlog primera, sada bi smo mogli da kao određujuće veličine uzmemo: ϕ_0, g, l, t, m . Tako, tražimo:

$$\phi = f(\phi_0, g, l, t, m) \quad (\text{H.49})$$

Dimenzije ovih veličina su u sledećoj tabeli: Veličina ϕ je bezdimenzionalna, pa otpada potreba traženja

Veličina:	ϕ	ϕ_0	g	l	t	m
Dimenzije:	-	-	LT^2	L	T	M

Tabela H.2: Tabela dimenzija veličina za koje smo pretpostavili da učestvuju u zakonu za matematičko klatno

faktora u $\alpha_1^{m_1}, \alpha_2^{m_2}, \dots, \alpha_k^{m_k}$. Od pet veličina uzetih za argumente funkcije f tri imaju nezavisne dimenzije, pa imamo $n - k = 5 - 3 = 2$ bezdimenzionalnih argumenta. Od ovih pet posmatranih veličina jedna, ϕ_0 , je već bezdimenzionalna: drugu moguću bezdimenzionalnu kombinaciju, $\sqrt{g/l}t$, nalazimo brzo kombinovanjem dimenzija g, l i t (ako neku bezdimenzionalnu kombinaciju stepenujemo proizvoljnim eksponentom, ona, naravno, ostaje bezdimenzionalna; možemo, tako, bezdimenzionalne kombinacije pogodnim stepenovanjem dovesti u oblik koji nam izgleda praktičan). Prema tome, kao rezultat dimenzionalne analize dobijamo

$$\phi = F\left(\phi_0, \sqrt{\frac{g}{l}}t\right) \quad (\text{H.50})$$

Situacija u pogledu preostalog eksperimentalnog zadatka je opet daleko povoljnija nego što bi bio slučaj da raspoložemo samo sa (H.49) i da želimo eksperimentalnim putem da nadujemo funkciju f . Mnogo

daljih poučnih primera upotrebe dimenzionalne analize može se naći npr. u knjizi Hantlia (1952). Iscrpniji prikaz rezultata dimenzionalne analize u raznim oblastima mehanike dat je u knjizi Sedova (1967). Naročito je impresivna primena metoda dimenzionalne analize u proučavanju turbulentnih procesa, gde, kako ćemo videti, zbog osrednjavanja jednačina kretanja i termodinamike dolazimo u situaciju da je broj fundamentalnih jednačina manji od broja nepoznatih veličina. Tu se dimenzionalnom analizom, uz pomoć raznih intuitivnih hipoteza, često dodje do relacija koje se veoma dobro slažu sa osmatranjima, a što ne bi bilo moguće postići, kao u ovde posmatranim primerima, nekim drugim putem.

List of Figures

1.1	Shematski prikaz vertikalnog preseka kroz troposferu, (prema Stulu (24))	5
1.2	Evolucija temperatura merenih blizu tla (9.75 kPa) i na visini oko 1100 m (850 kPa). Merenja su vršena sa radiosondom lansiranom iz Ft. Sill, Oklahoma, SAD, (prema Stulu (24))	6
1.3	Tipični profili temperature (T), tačke rose (T_d), potencijalne temperature (θ), virtuelne potencijalne temperature (θ_v) i sadržaja vodene pare (r) dobijeni mikro sondom, (prema Stulu (24))	7
1.4	Idealizovani primeri srednjeg vetra (a), talasa (b) i turbulencije (c) (prema Stulu (24)). . .	8
1.5	Shematski prikaz trajektorija delića u turbulentnom toku	9
1.6	Detaljniji prikaz promene vetra sa slike (1.4) sa naznačenim odstupanjem kao i srednjom vrednošću, (prema Stulu (24))	12
1.7	Shematski prikaz odnosa nagiba srednjih vrednosti prema nagibu trenutne vrednosti. Pe- riod osrednjavanja je predstavljen dužinom horizontalnih strelica, (prema Stulu (24)) . .	14
1.8	Uz objašnjenje $-\partial_z(\rho_0 \overline{w'u})$	17
2.1	Relativan odnos viskoznog i turbulentnog transporta količine kretanja u neposrednoj blizini zida (prema Meloru (15)).	24
2.2	Profili brzine u neutralnom graničnom sloju pri vrednostima Re broja 5×10^3 i 5×10^4 . Na panelu (a) za razmer brzine je uzeta brzina U_∞ , dok je za razmer dužine uzeta dužina δ . Na sledećem panelu, panel (b), razmer razlike brzine U od U_∞ je u_τ dok je za razmer dužine uzeta vličina srazmerna sa δ . Treći panel (c) pokazuje slučaj kada se za karak- teristične razmere za dužinu i brzinu ima z_0 odnosno brzina trenja, u_τ (prema Meloru i Gibsonu (16)).	25

2.3	Shematski raspored podslojeva kod graničnog turbulentnog sloja u slučaju homogenog fluida (debljina viskoznog podsloja je jako uveličana).	27
2.4	Izmereni profil brzine u blizini glatkog zida predstavljeni preko razmera brzine odnosno dužine, karakteristične za režim za koji važi zakon zida (prema Meloru (15)).	28
2.5	Shematski prikaz PGS-a u polju visokog pritiska, iznad kopna. PGS se sastoji od tri glavna dela: jako tubulentnog izmešanog podsloja; manjeg turbulentnog, zaostalog podsloja gde je u prethodnom periodu bio izmešani podsloj; i noćnog stabilnog podsloja u kome imamo sporadičnu pojavu turbulencije. S1-S6 su vremenski markeri trenutaka za koje će biti dati profili na slici (2.8), (prema Stulu (24)).	30
2.6	Tipični, dnevni profili srednje virtuelne potencijalne temperature ($\overline{\theta}_v$), intenziteta vetra (M), vodene pare, izražene kao specifična vlaga (r) i nekog pasivnog polutanta, (prema Stulu (24)).	31
2.7	Profili srednje virtuelne potencijalne temperature $\overline{\theta}_v$, levo i intenziteta vetra M , desno, za idealizovan stabilan granični sloj u polju visokog pritiska. Vertikalna isprekidana linija, desno, označava odgovarajući geostrofski vetar, (prema Stulu (24)).	32
2.8	Profili srednje virtuelne potencijalne temperature koji pokazuju dnevnu evoluciju PGS-a polazeći od 16 h lokalnog vremena. S1 – S6 označavaju trenutke za koje važe profili a u skladu sa slikom 2.5 (prema Stulu (24)).	33
2.9	Tipičan opseg vrednosti M-O dužine u toku dana (ovde je definicija L -a uzeta sa suprotnim znakom od definicije u tekstu). Apscisa označava sate u danu, (prema Stulu (24)).	35
2.10	Osmotrene, bezdimenzionalne vrednosti: gradijenta vetra (levo) prikazanog preko funkcije Φ_M i gradijenta temperature (desno) prikazanog preko funkcije Φ_H , iz Kansas eksperimenta (tačkice). Pune linije, unutar oblasti sa izmerenim vrednostima, su iste dobijene iz modela Melora (14). Važno je napomenuti da je u prikazu ovih rezultata L definisano sa suprotnim znakom od onog u tekstu (prema Businger i dr. (7))	38
2.11	Normalizovana varijansa vertikalne brzine $\frac{\sqrt{w^2}}{u_\tau}$ (a) i potencijalne temperature $\sqrt{\theta^2}/\Theta_\tau$ (b). Isprekidana linija predstavlja predviđanje na osnovu teorije o lokalnoj slobodnoj konvekciji a tačke predstavljaju osmatranja.	39
2.12	Shematski prikaz mogućih režima preko odnosa produkcije rada sile potiska (BP) i produkcije smicanja (SP), od slučaja kada ne može da nastane turbulencija zbog velike stabilnosti do slučaja slobodne konvekcije, (prema Stulu (24)).	42
2.13	Mogući režimi toka fluida u zavisnosti od Ri broja (gornja shema) odnosno kombinovan uticaj Ri i Re brojeva (donja shema), (prema Stulu (24)).	45

2.14	Vertikalni presek kroz PGS visine \bar{z}_i koji prikazuje idealizovane termale visine z_i , (prema Stulu (24)).	46
2.15	Izgled lidarske slike konvektivnih termika, gde se refleksija vrši na aerosolima koji su "pokupljeni" pri tlu, (prema Huperu (6)).	47
2.16	Tipičan izgled rolni u PGS-u, (prema Stulu (24)).	48
2.17	Profili fluksa toplote prema rezultatima Wangara eksperimenta prikazani: a) dimenziono $(\bar{w}\theta)_0$ prema z (km) i b) bezdimenziono $\bar{w}\theta/\bar{w}\theta_0$ prema z/z_i , (prema Stulu (24)).	49
2.18	Shematski prikaz različitih režima koji se mogu sresti u PGS-u. Uočiti da se apscise razlikuju na levom i desnom panelu, (prema Stulu (24)).	50
2.19	Kao na prethodnoj slici ali za stabilan slučaj, (prema Stulu (24)).	51
3.1	Primeri tipičnih korelacionih funkcija kada: monotono opada $R_1(\xi)$, i kada teži nuli uzimajući i negativne vrednosti $R_2(\xi)$	53
3.2	Uz definiciju integralnog razmera	57
3.3	Uz definiciju tenzora korelacije	63
3.4	Raspored brzina kod definicija funkcija $f(r)$ i $g(r)$	64
3.5	Primeri diskretnog spektra (levo) i kontinuarnog spektra (desno)	67
3.6	Shematski prikaz spektra vetra pri tlu prema računu Van der Hovena (3)	67
3.7	Shematski prikaz spektra. Naznačene su oblasti vrtloga najvećih razmera, zatim oblast gde je maksimum kinetičke energije, kao i ravnotežna oblast koja sadrži inercijalnu podoblast. Takođe su naznačene neke od funkcija koje opisuju pojedine delove spektra. Za prvi deo spektra k^4 i $\epsilon^2 k$ i za ravnotežnu oblast $\epsilon^{2/3} k^{-5/3}$	74
3.8	Shematski prikaz stukturane funkcije u zavisnosti od relativnog rastojanja r	76
3.9	Shematska ilustracija promene oblika ("produženja") spektra nakon povećanja Re	78
3.10	Uz definiciju makro razmera L	79
3.11	Veza između proteklog vremena ζ i vremena ξ u odnosu na trenutak t_0 (sadašnji trenutak)	83
3.12	$[\overline{x_i^2}]^{1/2}$ kao funkcija vremena, puna linija. Asimptote za malo i veliko t , isprekidane linije. 84	
3.13	Jedan primer odnosa funkcije gustine $\chi(x)$, (a) i njene funkcije odstojanja suseda $q(l)$, (b). 86	
3.14	Ričardsonov dijagram koeficijenta difuzije za razne prostorne razmere.	88

4.1	Shematski prikaz hodografa vetra po Ekmanovoj spirali za a) atmosferu i b) za okean. Sa G je obeležen intenzitet geostrofskog vetra pri čemu se njegov pravac poklapa sa pravcem x - ose. Kako se spuštamo nadole vetar skreće ulevo da bi pri tlu zauzeo pravac naznačen debljom isprekidanom strelom. Intenzitet vetra eksponencijalno opada sa visinom, a karakteristična dužinska razmera je $[f/2K_m]^{1/2}$, (prema Busingeru (2)).	91
4.2	Ilustracija uz Prantlovu teoriju	93
4.3	Ilustracija kako član $p(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$ doprinosi redistribuciji količine kretanja . . .	98
4.4	Dnenvi hod: (levo) turbulentne kinetičke energije, (desno) varijanse potencijalne temperature. (prema (17))	114
4.5	Rejnoldsovi naponi, paralelni geostrofskom vetru, (levo) i normlni na pravac geostrofskog vetra (desno) (prema (17))	115
A.1	Grafik funkcije $y(x) = (e^{-x} - e^{-\frac{x}{\varepsilon}})/(e^{-1} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}})$, na intervalu $(0 \leq x \leq 1)$ za dve vrednosti parametra $\varepsilon = 0.1$ i 0.025 . Pri manjoj vrednosti ε -a uži je granični sloj odnosno unutrašnji region. (Prema Orzag i Bender, 1978)	120
A.2	Shematski prikaz rešenja problema granične vrednosti $\varepsilon y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$ na domenu $[0 \leq x \leq 1]$ uz uslov $a(x) > 0$ i uz granične uslove $y(0) = a$ i $y'(1) = B$. . .	122
B.1	Fluksevi količine kretanja i toplote za nestabilan i stabilan režim za razne vrednoti vetra i razne vrednoti razlike temperature vazduha na visini od 2 m. i temperature tla. U oba slučaja gornji panel je za slabije vetrove a donji za jače vetrove.	134
F.1	Odnos dva koordinatana sistema (t' i t'' prema t, τ)	146

List of Tables

3.1	Veličine i njihove dimenzije koje određuju oblik spektra tke u ravnotežnoj oblasti . . .	72
3.2	Tabela vrednosti raznih Re i odnosa nekih dužinskih razmera. U prvoj koloni je Re_M , tako da kažemo polazni Re . Zatim Re_L broj za razmere koje sadrže najviše kinetičke energije. U sledećoj koloni je Re_λ za mikrorazmer, a u zadnje dve kolone su odnosi L i λ odnosno λ i η_d	81
4.1	Tabela po grupama prema vrsti članova koji postoje kod jednačina drugog reda a koje treba izraziti preko ostalih članova sistema	97
4.2	Tabela razmera i veličina koje će se koristiti pri razmernoj analizi jednačina drugog reda	104
B.1	Potreban broj iteracija da bi se razlika u fluksevima toplote između dve iteracije, bila manja od 10^{-5} , za razne vrednosti gradijenta temperature (vertikalna kolona) i intenziteta vetra (horizontalna kolona). Parameter stb je indikator nestabilnosti (-1) ili stabilnosti (1). Kada je $stb = 0$ imamo neutralnu stratifikaciju.	129
H.1	Tabela dimenzija veličina za koje smo pretpostavili da učestvuju u zakonu za slobodno padanje	164
H.2	Tabela dimenzija veličina za koje smo pretpostavili da učestvuju u zakonu za matematičko klatno	165

Literatura

- [1] C. M. Bender and S. A. Orszag. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. The McGraw Hill Book Company, 1978.
- [2] J.A. Businger. *Equations and concepts*. Reidel publishing Co., Dordrecht, 1982. Atmospheric Turbulence and Air Pollution Modelling.
- [3] Van der Hoven. Power spectrum of horizontal wind speed in the frequency range from 0.0007-900 cycles per hour. *J. of Meteorology*, 14:160–, 1957.
- [4] J. Gleick. *Chaos, Making a New Science*. Viking Penguin, Inca, NY, 1987.
- [5] J.C. Hinze. *Turbulence*. McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering. McGraw-Hill, second edition, 1975.
- [6] W. C. Hooper. The diurnal evolution of the planetary boundary layer; lidar observations above a flat homogenous surface, 1982.
- [7] Y.I. Izumi J.A. Businger, J.C. Wyngaard and .F. Bradley. Flux-profile relationship in the atmospheric surface layer. *J. Atmos. Sci.*, 28:181–189, 1971.
- [8] Z.I. Janjić. The step-mountain coordinate: physical package. *Monthly Weather Review*, 118:1429–1443, 1990.
- [9] Z.I. Janjić. The surface layer parameterization in the eta model, 1991. Lecture Notes.
- [10] Z.I. Janjić. The step-mountain eta coordinate model: further developments of the convection, viscous sublayer and turbulence closure schemes. *Monthly Weather Review*, 122:927–945, 1994.

- [11] P. Lacerure G. Therry J.F. Andre, G. DeMoor and R. DuVacht. Modeling the 24-h evolution of the mean and turbulent structure of the planetary boundary layer. *J. Atmos. Sci.*, 35:1861–1883, 1978.
- [12] A.N. Kolmogorov. Energy disipation in locally isotropic turbulence. *Doklady AN SSSR*, 32(1):19–21, 1941.
- [13] J. L. Lamely and H.A. Panofsky. *The structure of Atmospheric Turbulence*, volume XIII of *Mono-graphs and Texts in Physics and Astronomy*. John Wiley & Sons., NY, 1964. Interscience Publ.
- [14] G.L. Mellor. Analytic prediction of the properties of stratified planetary surface layers. *J. Atmos. Sci.*, 30:1061–1069, 1973.
- [15] G.L. Mellor. Lecture notes from the ams 530 course. AMS, Princeton University, 1984.
- [16] G.L. Mellor and D. M. Gibson. Equilibrium turbulent boundary layers. *J. Fluid. Mech.*, 24:225–253, 1966.
- [17] G.L. Mellor and T. Yamada. A hierarchy of turbulence closure models for the planetary boundary layer. *J. Atmos. Sci.*, 31:1791–1806, 1974.
- [18] A.S. Monin. *Adv. in Geophysics*, 6:29–40, 1959.
- [19] A.S. Monin and A.M. Yaglom. *Statistical Fluid Mechanicsic Turbulence*, volume 1 & 2. The MIT Press, Cambridge, MA, 1973.
- [20] A.M. Obukhov. On the distribution of energy disipation in the spectrum of turbulent flow. *Doklady AN SSSR*, 32:19, 1941.
- [21] F. A. Pasquill. *Atmospheric Diffusion*. Halstead Press-Wiley, New York, second edition, 1974.
- [22] C. A. Pauslon. The mathematical representation of wind speed and temperature profiles in the unstable atmospheric surface layer. *J. of Appl. Meterology*, 9:857–861, 1970.
- [23] J.C. Rotta. *Turbulent Boundary Layers in Incompressible Flow*, volume 2 of *Progress in Aeronautical Sciences*. Pergamon Press., 1984.
- [24] Ronald B. Stull. *An Introduction to Boundary Layer Meteorology*. Atmospheric Sciences Libaray. Kluwer Academic Publishers, 1988.

-
- [25] O.G. Sutton. *Micrometeorology*. McGraw-Hill, 1953. 1977 reprint by Kreiger Publ. Co., Inc., 645 NY Ave., Huntington, NY.
- [26] G. I. Taylor. Diffusion by continuous movements. *Proc. London Math. Soc.*, 7:196–212, 1921.
- [27] G. I. Taylor. *Adv. in Geophysics*, 6:101–112, 1959.
- [28] H. Tennekes and J.L. Lumley. *A First Course in Turbulence*. The MIT Press, Cambridge MA., second edition, 1982.
- [29] T. Yamada. An application of a three-dimensional simplified second-moment closure numerical model to study atmospheric effects of a large cooling-pond. *Journal of Atmospheric Environment*, 13:693–704, 1979.

Indeks

- čtetvorotrećinski zakon, 88
- član odgovoran
 - za disipaciju, 99
 - za izotropizaciju, 97
 - za trostruke korelacije, 100
- ansambl, 11
- aproksimacija
 - regularna, 124
 - singularna, 124
- asimptotsko
 - sklapanje, 29
 - spajanje, 29
- asimptotsko poklapanje, 120
- atmosfera
 - slobodna, 6
- Barnar-ove ćelije, 55
- bezdimezionalne vrednosti
 - gradijenta temperature, 38
 - gradijenta vetra, 38
- bifurkacije, 55
- broj
 - Rejnoldsov, 7
 - kritičan, 8
 - Ričardsonov, 42
 - fluksni, 43
 - gradijentni, 43
 - kritičan, 44
- brojna vrednost, 154
- brzina
 - disipacije, 61
 - trenja, 24, 34
- Businessk aproksimacija, 14
- defekt brzine, 26
- definicija
 - turbulentnog kretanja, 8
- difuzija
 - molekulska
 - kolićine kretanja, 15
 - molekulska
 - temperature, 15
 - razlićite prostorne razmere, 88
 - turbulentna, 81
- dijagram koeficijenta difuzije, 88
- dimenzionalna analiza, 153
- disipacija, 19, 21
 - tke**, 72
 - srednja, 59
 - viskozna, 69
- dnevni hod brzine vetra, 68

- dnevni hod PGS-a
 - analiza, 30
- dominantni član, 106
- druga hipoteza Kolmogorova, 73
- efekat
 - izolacije podloge, 41
- Ekmanova spirala, 92
- empirijske
 - teorije turbulencije, 22
- energetski bilans, 21
- ergodiska hipoteza, 12
- evolucija spektra **tke**, 68
- fazni prostor, 55
- Fikova jednačina, 81
- fluidi
 - homogeni, 23
 - stratifikovani, 29, 32
- fluks
 - količina kretanja, 128
 - toplote, 128
- frekvenca, 64
- funkcija odstojanja suseda, 85
- Furijeov
 - integral, 64
 - koeficijenti, 64
 - red, 64
 - transform, 65
- Gausova raspodela, 117
- glavni razmer, 101
- globalno rešenje, 120
- granični sloj, 5, 6
- granični sloj, definicija, 119
- granični sloj, izolovan, 119
- granični sloj, spoljni region, 120
- granični sloj, unutrašnji region, 120
- granični uslov, donji, 111
 - za fluksve toplote, 111
 - za varijansu potencijalne temperature, 112
- granični uslov, donji
 - za fluksve količine kretanja, 111
 - za temperaturu, 111
 - za vetar, 111
 - za **tke**, 112
- granični uslovi, 111
- granični uslovi, gornji
 - za turbulentne flukseve, 111
- granični uslovi, gornji
 - za vetar, 111
 - za **tke**, 111
- haotičan
 - tok, 10
- haotičnost, 6, 8
- hidrostatička aproksimacija, 109
- Hipoteza koeficijenta razmene, 90
- horizontalne rolne, 45
 - idealizovana struktura, 45
- idifuzija
 - nepokretnog izvora, 82
 - relativna, 82
- indeksna notacija, 17
 - vektora, 17
- inercijalna podoblast, 73, 75
- infracrveno, zračenje, 29
- izmešani sloj, 44

- izotropizacija, 97
izotropni deo, 102
izotropni vrtlozi, 72
izvor
 tke, 21
- jaka stabilnosti, 41
jednačina
 kontinuiteta, 14
 termodinamike, 14
 turbulentne kinetičke energije, 19
 za odstupanja , 15
jednačina **tke**
 spektralna reprezentacija, 69
jednačine
 kinetičke energije fluktuacija, 19
 kinetičke energije srednjeg toka, 19
 Navije-Stoksove, 13
 za srednje vrednosti, 15
 za srednje vrednosti, 13
- Kanzaski eksperiment, 37
karakteristična vrednost
 potencijalna temperatura, 34
koeficijent difuzije, 81
Kolmogorov, N.A., 52
koncentracija supstance, 81
konstanta, Von Karmana, 28
konstitutivni koeficijenti, 96
konvekcija, 55
 lokalna slobodna, 39
konvektivne ćelije, 45
korelaciona funkcija, 52
 Lagranž-ovska, 53
- homogene i izotropna turbulencije, 52
Ojlerovska, 53
prostorna, 52
vremenska, 52
kvaziperiodičnost, 9
- Landau slika, 70
logaritamski zakon, 26
- makroturbulencija, 68
mali parameter, 119
mehanička turbulencija
 laboratorijsko generisanje, 80
mera neizotropnosti, 103
mernie jedinice, 153
mikrorazmer, 57
mikroturbulencija, 68
Monin, Obuhov, 32
- nadadijabatski gradijenti, 39
naponi
 Rejnoldsovi, 16
neizotropni deo, 102
nelinearna interakcija, 71
nestabilna stratifikacija, 46
neuredjenost, 8
nivo 1, 108, 113
nivo 2, 108, 112
nivo 2.5, 113
nivo 3, 107, 110
nivo 4, 102, 109
nivo zatvaranja, jednačina, 102
- oblast disipacije, 75
odredjujući parametri, 24

- operator osrednjavanja, 12
- opseg vrednosti M-O dužine, 35

- parametar rada sile potiska, 34
- podela spektra, 73
- podstoj
 - molekularni, 29
 - viskozni, 27
- potreban uslov
 - rasta turbulencija, 44
- Prantl
 - broj, 43
 - dužina puta mešanja, 93
 - teorija, 92
 - primedbe, 95
 - turbulentni broj, 43
- prelaz
 - iz laminarnog u turbulentno kretanje, 43
 - u turbulentni tok, 8
- prenos
 - toplote, 29
 - vlage, 29
- pretvaranje
 - tke**, 21
 - kinetičke energije srednjeg toka, 21
 - turbulentne kinetičke energije, 20
 - turbulentne potencijalne energije, 21
 - turbulentne potencijalne energije, 20
- priroda toka fluida, 42
- proces
 - neperiodičaan, 56
 - periodičan, 55
- profil
 - brzine srednjeg vetra vetra, 41
 - brzine, 36
 - količinu kretanja, 35
 - pasivne supstance , 35
 - potencijalne temperature, 36
 - toplote, 35
 - vetra, 27
 - logaritamski, 94
 - logaritamsko linearan, 37
 - vlažnosti, 36
- promena PGS-a
 - u toku dana, 29
- prva hipoteza Kolmogorova, 73

- računaje
 - flukseva, 128
- ravnotežna oblast, 73
- ravnotežno stanje, 21
- razmer
 - člana disipacije, 105
 - advektivnog člana, 107, 108
 - brzine, 34
 - blizu zida, 26
 - difuznog člana, 106–108
 - disipacije
 - vremenski, 61
 - dužine
 - blizu zida, 24
 - daleko od zida, 26
- integralni, 53
- karakterističan, 34
- M-O dužine, 34, 35
- M-O lokalni, 46
- makrorazmer, 53
- mikrorazmer, 53

- produkcije zbog rada sile potiska, 105
- produkcije zbog smicanja, 105
- temperature, 34
- tubulentne difuzije, 105
- vlažnosti, 34
- vremenski integralni, 54
- vremenski, članova, 106
- razmere
 - prostorne i vremenske za delove spektra, 77
- razmerna analiza, 101
- rešenje
 - spoljašnje, 123
 - tačno
 - uniformna aproksimacija, 123
 - unutrašnje, 123
- realizabilnost, problem, 116
- realizacija, 11
- Rejli, 55
- Rejnolds
 - Osborn, 7
- Rejnoldsov
 - broj, 7
- Rejnoldsovi članovi, 16

- sinoptički, 68
- skretanje vetra sa visinom, 92
- sloj
 - iiinverzije, 30
 - inverzije, 30
 - konstantnog fluksa, 24
 - konvektivni, 30
 - površinski, 30
 - stabilan, 30
- smicanje osnovne struje, 21

- spektar
 - tke**, 68
 - diskretni, 66
 - intenziteta vetra, 66
 - kontinuarni, 66
 - Van der Hovena, 66
- spektralna
 - analiza, 64
 - gustina, 66
- spektralni jaz, 68
- srednja
 - disipacija, 59
- srednja vrednost
 - po ansamblu, 11
 - u prostoru, 12
 - u vremenu, 12
- srednje kvadratno odstupanje, 82
- srednji
 - gradijent brzine, 59
 - slobodni put, 29
 - tok, 10
- stabilna stratifikacija, 31, 46
- statistička teorija turbulencije, 52
- statističke karakteristike, 72
- stratifikacija
 - nestabilna, 127
 - stabilna, 128
- stratifikacija, bliska neutralnoj, 37
- stratusni oblak, 31
- strukturna funkcija, 75
 - brzine, 75
 - parametar, 75
 - shematski prikaz, 75
 - veliĉine A, 75

- veza sa korelacionom funkcijom, 76
- suptropski, 31
- talasni broj, 64
- Tejlorova teorema, 82
- teleskopiranje, 120
- tenzor
 - drugog reda, predstavljanje, 63
 - izotropni, 63
 - korelacije, 62
 - longitudinalna komponenta, 64
 - transverzalna komponenta, 64
- teorema
 - Π , 163
 - Bakingamova, 163
- teorija
 - graničnih slojeva, 29
 - Ričardsonova, 85
 - sličnosti, 72
 - sličnosti Monin-Obuhov, 32
 - zatvaranja
 - drugog reda, 95, 116
 - višeg reda, 95
- termal, 45
 - vertikalni presek, 45
- tok
 - haotičan, 10
 - laminaran, 7
 - prelaz, 8
 - srednji, 10
 - stacionaran, 23
 - turbulentan, 7, 10
- trajektorija, u faznom prostoru, 55
- transfer energije, 117
- trenutna vrednost, 10
- turbulentna
 - difuzija, 81
- turbulentno
 - kretanje
 - definicija, 8
 - difuzivnost, 9
 - disipativnost, 10
 - kontinuum, 10
- univerzalne karakteristika, 72
- uredjenost, 54
- uz-gradijentni transporti, 116
- varijansa
 - potencijalne temperature, 39
 - vertikalne brzine, 39
- veličina
 - definicija, 154
 - dimenzija, 155
 - izvedene, 155
 - osnovne, 155
- veliĉine
 - bezdimezionalne, 153
 - dimenzionalne, 153
 - fiziĉke, 153
- vetrikalni profil
 - potencijalne temperature, 6
 - sadrzaja vodene pare, 6
 - taĉke rose, 6
 - temperatura, 6
- visina inverzije, 46
- vreme gašenja turbulencije, 61
- vertlog, 54

- nastajanje, 54
- nestajanje, 54
- zagrevanje tla, 29
- zakon
 - defekta, 26
 - logaritamski, 26
 - zida, 26
- zona uvlačenja, 30, 31