Normalna raspodela

- Neprekidna raspodela, povezana sa drugim diskretnim i neprekidnim raspodelama. Veoma značajna.
- Sp X ima **normalnu raspodelu sa parametrima m i σ^2**, ako je gustina raspodele

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}} \qquad x \in R,\ \sigma > 0,\ m \in R$$

- Označavamo sa $X : \mathcal{N}(m,\sigma^2)$.
- Naziva se i **Gausova**, jer je Gaus dokazao da se $g(x)$ dobija kao gustina raspodele sp koja je jednaka zbiru velikog broja slučajnih grešaka.

Normalna raspodela, disperzija

- Matematičko očekivanje normalne raspodele je

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x=m$$

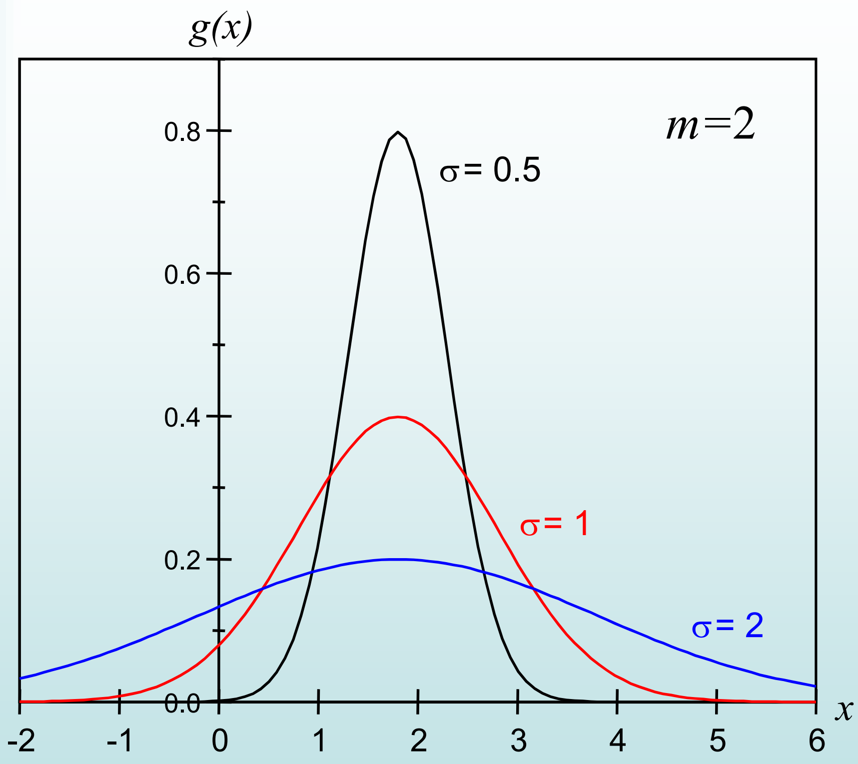
- Disperzija normalne raspodele je

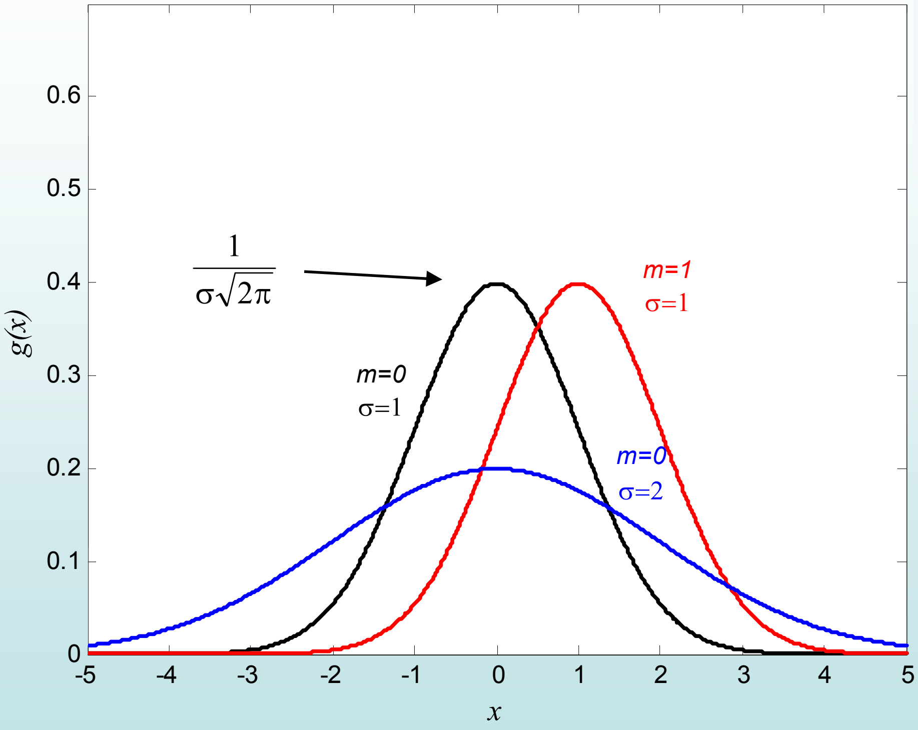
$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x=\sigma^2$$

- Koeficijenti asimetrije i spljoštenosti su nula, jer su

$$\mu_3=0 \qquad \mu_4=3\sigma^4$$

Normalna raspodela za različite vrednosti parametara m i σ^2





Osobine normalne raspodele

Sa slike se uočava:

- Lokalni maksimum u tački $x=m$
- Simetrija grafika oko prave $x=m$
- Dve prevojne tačke $x=m\pm\sigma$
- Horizontalna asimptota $y=0$
- Maksimalna vrednost jednaka $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

Normalna normirana raspodela

- **Ako sp X ima $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ raspodelu, tada sp $Y=(X-m)/\sigma$ ima $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodelu**

$$F_Y(y) = P[Y < y] = P\left[\frac{X-m}{\sigma} < y\right] = P[X < \sigma y + m] = F_X(\sigma y + m)$$

$$g_Y(y) = F_Y'(y) = F_X'(\sigma y + m) = \sigma g_X(\sigma y + m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}$$

- Za računanje vrednosti funkcije raspodele bilo koje sp sa normalnom raspodelom, dovoljno je znati vrednosti funkcije raspodele sp sa normalnom normiranom raspodelom.

Određivanje funkcije raspodele

- Pošto se vrednost integrala $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$

  ne može dobiti elementarnim putem, koriste se tablice. U tablicama su date vrednosti $\Phi(x)=F(x)-0{,}5$ za $x\in[0{,}5]$.

- Ako $X:\mathcal{N}(0,\ 1)$, iz tablice $F(x)=\mathrm{P}[X<x]=0{,}5+\Phi(x)$ za $x\in[0;2{,}99]$. Npr: $\mathrm{P}[X<0{,}12]=0{,}54776$.

x	0	1	2	3	...	9
0,0	0,00000	0,00399	0,00798	0,01197	...	0,03586
0,1	0,03983	0,04380	**0,04776**	0,05172	...	0,07535
0,2	0,07926	0,08317	0,08706	0,09095	...	0,11409
...	...	...	...	...	...	...
2,9	0,49823	0,49819	0,49825	0,49831	...	0,49861

Određivanje funkcije raspodele, nastavak

- Ako Y:$\mathcal{N}(2, 3^2)$, tada

$$X = \frac{Y-2}{3} : \mathcal{N}(0, 1)$$

$$P[Y < 2{,}36] = P\left[\frac{Y-2}{3} < \frac{2{,}36-2}{3}\right] = P[X < 0{,}12] = 0{,}54776$$

- Ako je $x<0$: Treba odrediti P[X<-0,12]. Na osnovu simetrije gustine raspodele:

$$P[X < -0{,}12] = P[X > 0{,}12] = 1 - P[X < 0{,}12] = 1 - 0{,}54776 = 0{,}45224$$

Određivanje verovatnoća

- Koristi se i sledeće relacije:

$$P[|X| < a] = 2\Phi(a), a > 0$$

$$P[-b < X < a] = \Phi(a) + \Phi(b), (a, b > 0)$$

$$P[X > a] = \begin{cases} 0{,}5 - \Phi(a), & a > 0 \\ 0{,}5 + \Phi(-a), & a < 0 \end{cases}$$

Za $m=0$ i $\sigma^2=1$

$$P[|X| < m + 3\sigma] = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}9973 \approx 1$$

- Pravilo 3-sigma

Muavr-Laplasova teorema

- Neka sp S_n:$\mathcal{B}(n, p)$ raspodelu. Tada za verovatnoće iz zakona raspodele za S_n važi, kada $n \to \infty$

$$P(S_n = j) \to \frac{1}{\sqrt{npq}} g\left(\frac{j - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$P[a \le S_n \le b] \to \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\mathrm{d}x$$

$$q = 1 - p, \qquad \alpha = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}, \quad \beta = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}, \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

S_n:$\mathcal{B}(n, p)$, kada $n \to \infty$, $S_n^* = \dfrac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$ ima $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelu

Primena Muavr-Laplasove teoreme

- Primer. Odrediti verovatnoću da se od 1200 bacanja numerisane kocke, broj 5 dobije: a) 200 puta, b) između 202 i 212 puta.
- Slučajna promenljiva jednaka broju dobijenih petica pri 1200 bacanja ima $\mathcal{B}(1200,\ 1/6)$ raspodelu.
- Primenom Muavr-Lapalasove teoreme, jer je np=1200·1/6=200>10, dobijamo

$$P[S=200]=\frac{1}{\sqrt{npq}}g(0)=\frac{1}{\sqrt{200\cdot 5/6}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}=\sqrt{\frac{3}{1000\pi}}=0{,}0309$$

$$S_n^*=\frac{S_n-np}{\sqrt{npq}} \qquad P\left[\frac{2}{\sqrt{\frac{500}{3}}}<\frac{S_n-200}{\sqrt{200\cdot 5/6}}<\frac{12}{\sqrt{\frac{500}{3}}}\right]=P[0{,}16<X<0{,}93]=0{,}32380-0{,}06356=0{,}2602$$