Momenti

- Neka je $k \in N$ i X data sp. Ako postoje $E(X^k)$, odnosno $E(X-E(X))^k$, nazivaju se redom ***k*-tim momentom**, odnosno ***k*-tim centralnim momentom sp *X***.
- ***k*-ti moment** označavamo sa m_k
- ***k*-ti centralni moment** označavamo sa μ_k
- $m_1 = E(X)$
- $\mu_1 = 0$.

Nejednakost Čebiševa

- Ako je za sp X matematičko očekivanje $E(X^2)$, konačno, tada važi nejednakost:

$$P[|X| \geq \varepsilon] \leq \frac{E(X^2)}{\varepsilon^2} \qquad \text{za svako } \varepsilon > 0$$

- Nejednakost Čebiševa donosi informaciju samo ako je desna strana < 1.

Primer, nejednakost Čebiševa

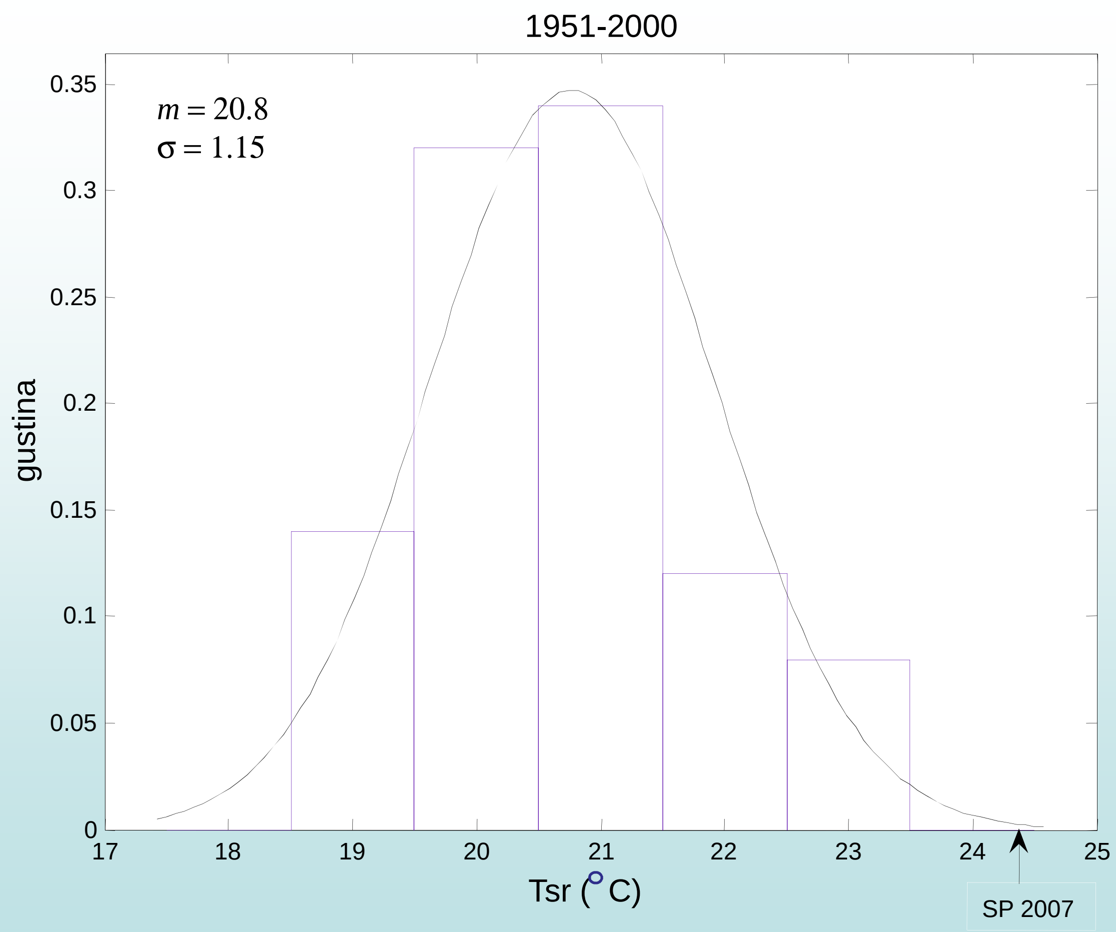
- Data je slučajna promenljiva X, sa matematičkim očekivanjem $E(X)=m$ i disperzijom $D(X)=\sigma^2$. Oceniti verovatnoću da slučajna promenljiva X ne odstupa od svog matematičkog očekivanja manje od 3σ.
- Zamenjujući u prethodnu nejednakost $\varepsilon=3\sigma$, dobija se

$$P[|X-E(X)|\geq\varepsilon]\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

$$P[|X-m|\geq 3\sigma]\leq\frac{D(X)}{9\sigma^2}=\frac{\sigma^2}{9\sigma^2}=\frac{1}{9}$$

Pravilo 3σ: Ako zakon raspodele sp nije poznat, a poznati su m i σ, u tom slučaju se interval $(m-3\sigma, m+3\sigma)$ smatra intervalom praktično svih mogućih vrednosti sp X.

Srednje julske temperature u Srbiji



(Unkašević i Tošić, 2011)

Disperzija

- Matematičko očekivanje predstavlja prosečnu vrednost sp, a *disperzija predstavlja prosečno kvadratno odstupanje od prosečne vrednosti*.
- **Definicija. Neka je data sp X. Ako postoji $E(X-E(X))^2$, tada kažemo da sp X ima disperziju i da je njena disperzija (varijansa):**

$$D(X) = E(X-E(X))^2$$

- Disperzija je centralni moment drugog reda.
- Pozitivna vrednost kvadratnog korena disperzije se naziva standardna devijacija:

$$\boxed{\sigma = \sqrt{D(X)}}$$

Osobine disperzije

- $\boldsymbol{D(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$

(1) Označimo sa $m \equiv E(X)$

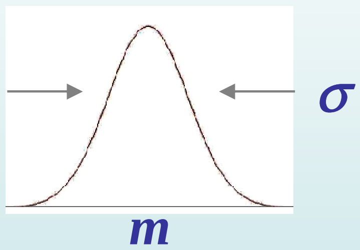
- Iz početne formule za disperziju: $D(X) = E(X-E(X))^2$,

koristeći (1), sledi:

- $D(X) = E(X^2 - 2Xm + m^2)$
- $D(X) = E(X^2) - 2mE(X) + E(m^2)$
- $D(X) = E(X^2) - 2mm + m^2$
- $D(X) = E(X^2) - m^2$

Osobine disperzije, nastavak

- Ako je P[X=a]=1, gde je a neka konstanta, tada je $D(X)=0$
- Ako je k konstanta, tada je $D(kX) = k^2 \cdot D(X)$
- Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive koje imaju disperziju, tada je $D(X + Y) = D(X)+D(Y)$



- Dokaz. $D(X+Y) = E((X+Y)-E(X+Y))^2 = E(X+Y)^2-(E(X+Y))^2= E(X^2+2XY+Y^2)-(E(X)+ E(Y))^2 = E(X^2)-(E(X))^2+E(Y^2)-(E(Y))^2 = D(X) + D(Y)$
- $D(kX) = E(k^2X^2) -(E(kX))^2 = k^2E(X^2)-(kE(X))^2 = k^2(E(X^2)-(E(X))^2)= k^2D(X)$

Primer, disperzija

- Za diskretnu slučajnu promenljivu (X, Y) dat je zajednički zakon raspodele. Odrediti disperzije slučajnih promenljivih X, Y i $A=X-2Y$.

$X \backslash Y$	1	3
-1	0,2	0,3
1	0,4	0,1

- Pošto su X i Y zavisne slučajne promenljive, $E(A)$ i $E(A^2)$ se izračunavaju neposredno.
- $E(A) = E(X) - 2E(Y)$, $E(A^2) = E(X^2) - 4E(XY) + 4E(Y^2)$,
- $(E(A))^2 = (E(X))^2 - 4E(X)E(Y) + 4(E(Y))^2$.
- $D(A) = E(A^2) - (E(A))^2 = D(X) + 4D(Y) - 4E(XY) + 4E(X)E(Y)$
- $E(X)=0$, $D(X)=1$, $E(Y)=1{,}8$, $D(Y)=0{,}96$, $E(XY)=-0{,}4$, $\mathbf{D(A)=6{,}44}$

Standardizovana slučajna promenljiva

- Slučajna promenljiva

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} \qquad \sigma = \sqrt{D(X)}$$

je **standardizovani (normirani) oblik** slučajne promenljive.

- $E(X^*)=0$, $D(X^*)=1$
- $E(X^*)= E(X)- E(X)=0$,
- $D(X^*)= D((X - E(X))/\sigma)= (D(X) + 0)/ \sigma^2)= \sigma^2/\sigma^2= 1$

Kovarijansa

- **Kovarijansa slučajnog vektora** slučajnih promenljivih X i Y je matematičko očekivanje slučajne promenljive $(X\text{-}EX)(Y\text{-}EX)$

$$C_{XY}=E[(X-EX)(Y-EY)]$$

- Ako je kovarijansa jednaka nuli, koordinate su ***nekorelisane***.
- Ako su slučajne promenljive X i Y nezavisne, kovarijansa je jednaka nuli. Obrnuto ne važi, tj. ako je C_{XY}=0, sp X i Y mogu biti zavisne.

Koeficijent korelacije

- Koeficijent korelacije slučajnih promenljivih X i Y je količnik

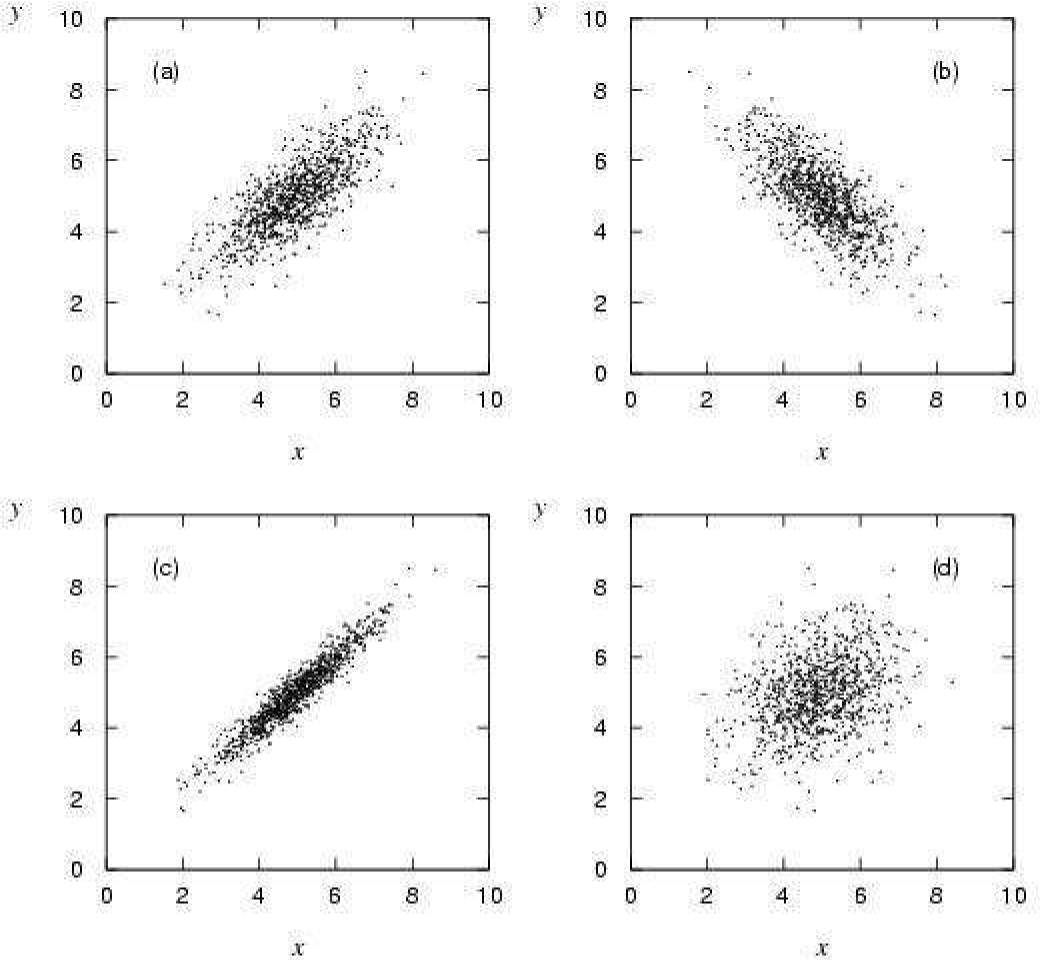
$$\rho_{X,Y} = \frac{C_{X,Y}}{\sqrt{DX \cdot DY}}$$

- Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive, tada je koeficijent korelacije jednak nuli.
- Vrednosti koeficijenta korelacije su intervalu [-1, 1].
- Koeficijent korelacije je način merenja stepena zavisnosti promenljivih X i Y.
- Ako je zavisnost linearna, koeficijent korelacije je po modulu jednak 1.

Primeri za koeficijent korelacije

$\rho = 0.75$

$\rho = -0.75$



$\rho = 0.95$

$\rho = 0.25$