Numeričke karakteristike slučajnih promenljivih

- Slučajne promenljive smo proučavali pomoću funkcija raspodele, zakona raspodele i gustina raspodele – to su ***funkcionalne karakteristike slučajnih promenljivih.***
- **Matematičko očekivanje** - jedna od osnovnih numeričkih karakteristika sp.

Def. Neka je X diskretna slučajna promenljiva sa konačno mnogo vrednosti i zakonom raspodele:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \\ p_1 \dots p_n \end{pmatrix}$$

Matematičko očekivanje sp X je:

$$E(X) = x_1 p_1 + \ldots + x_n p_n$$

Matematičko očekivanje

- **Neka je X elementarna slučajna promenljiva sa zakonom raspodele**:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \dots \\ p_1 \dots p_n \dots \end{pmatrix}$$

- **Ako je red $\Sigma x_j p_j$ apsolutno konvergetan tada kažemo da slučajna promenljiva X ima matematičko očekivanje i da je njeno matematičko očekivanje**:

$$E(X) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j p_j$$

expectation

red treba da bude apsolutno konvergetan jer vrednosti matematičkog očekivanja ne smeju da zavise od redosleda vrednosti sp u zakonu raspodele

Matematičko očekivanje ansp

- **Neka je X apsolutno neprekidna slučajna promenljiva sa gustinom raspodele $g(x)$. Ako integral**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot g(x)\mathrm{d}x$$

apsolutno konvergira, tada kažemo da slučajna promenljiva X ima matematičko očekivanje koje je jednako:

$$\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot g(x)\mathrm{d}x}$$

Primer za diskretnu sp

- X je diskretna sp sa konačno mnogo vrednosti. Pri bacanju kocke, raspodela dobitaka je:

$$X : \begin{pmatrix} -10 & 0 & 5 \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{6} & \frac{2}{6} \end{pmatrix}$$

- Koliki je dobitak posle N partija (Koliki je prosečni dobitak po partiji)?
- -10 se dobija u n_1 od N partija
- 0 se dobija u n_2 od N partija
- 5 se dobija u n_3 od N partija $(n_1 + n_2 + n_3 = N)$
- Ukupni dobitak iz N partija $(-10 \cdot n_1) + (0 \cdot n_2) + (5 \cdot n_3)$

Primer za diskretnu sp, nastavak

- Prosečni dobitak po partiji $\dfrac{(-10 \cdot n_1) + (0 \cdot n_2) + (5 \cdot n_3)}{N}$

$$= -10\frac{n_1}{N} + 0\frac{n_2}{N} + 5\frac{n_3}{N} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} -10p_1 + 0p_2 + 5p_3$$

$$\frac{n_1}{N} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{P}(X = -10) = p_1 = \frac{1}{6}$$

$$\frac{n_2}{N} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{P}(X = 0) = p_2$$

$$\frac{n_3}{N} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{P}(X = 5) = p_3$$

$$E(X) = -\frac{10}{6} + \frac{10}{6} = 0$$

Igra je “fer”

Funkcija slučajne promenljive

- Ako je φ neprekidna funkcija i X diskretna ili elementarna slučajna promenljiva čiji je zakon raspodele p_j=P[X=x_j], tada je za sp $Y = \varphi(X)$ matematičko očekivanje:

$$E(\varphi(X)) = \sum_j \varphi(x_j)P[X = x_j]$$

Ako je red apsolutno konvergentan

- Ako je X neprekidna slučajna promenljiva sa gustinom $g(x)$, tada je za sp $Y = \varphi(X)$ matematičko očekivanje:

$$E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot g(x) \mathrm{d}x$$

Ako je integral apsolutno konvergentan

Primer funkcije sp

- Neka je data raspodela za diskretnu sp X

$$X:\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix}$$

- Odrediti matematičko očekivanje za sp $Y=X^2+5$

$$Y:\begin{pmatrix} (-1)^2+5 & 0^2+5 & 1^2+5 & 2^2+5 \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix}$$

$$Y:\begin{pmatrix} 5 & 6 & 9 \\ \frac{2}{10} & \frac{4}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix}$$

$$E(Y)=5\frac{2}{10}+6\frac{4}{10}+9\frac{4}{10}=7$$

Dvodimenzionalna slučajna promenljiva

- Ako je (X, Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva čiji je zakon raspodele:

  $$p_{ij}=P[X=x_i,\ Y=y_j],\ i\in I\subseteq N,\ j\in J\subseteq N,$$

  i ako je $\varphi(u,v)$ neprekidna realna funkcija dve realne promenljive, tada je matematičko očekivanje slučajne promenljive $Z=\varphi(X,Y)$ jednako

  $$E(\varphi(X,Y))=\sum_{i,j}\varphi(x_i,y_j)p_{ij}$$

Ako je red apsolutno konvergentan

Dvodimenzionalna slučajna promenljiva

- Ako je (X, Y) dvodimenzionalna neprekidna slučajna promenljiva sa gustinom raspodele $g(x,y)$, $x,y\in R$ i $\varphi(u,v)$ neprekidna funkcija, tada je matematičko očekivanje sp $Z=\varphi(X,Y)$ jednako

$$E(\varphi(X,Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)\cdot g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Ako je integral apsolutno konvergentan

Osobine matematičkog očekivanja

- $E(X)$ i $E(|X|)$ istovremeno postoje ili ne postoje
- Ako je P[X=a]=1, gde je a neka konstanta, tada je $E(X)=a$
- Ako je P[$X \geq 0$]=1, tada je $E(X) \geq 0$
- Ako je P[$X \geq Y$]=1, tada je $E(X) \geq E(Y)$
- Ako je k konstanta, tada je $E(kX) = k \cdot E(Y)$
- Ako su X i Y dve slučajne promenljive koje imaju matematička očekivanja, tada je $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive koje imaju matematička očekivanja, tada je $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

Primer

- Za diskretnu slučajnu promenljivu (X, Y) dat je zajednički zakon raspodele. Odrediti $E(XY)$.

$X \backslash Y$	1	3
-1	0,2	0,3
1	0,4	0,1

- Slučajne promenljive X i Y su zavisne, pa treba odrediti raspodelu sp XY

$$XY : \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 3 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

- $E(XY) = (-3 \cdot 0{,}3) + (-1 \cdot 0{,}2) + 1 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}1 = -0{,}4.$