Funkcije slučajne promenljive

- Ako je X slučajna promenljiva i φ neprekidna funkcija, tada je $Y = \varphi(X)$ slučajna promenljiva.
- Neka je X diskretna slučajna promenljiva sa zakonom raspodele:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \\ p_1 \dots p_n \end{pmatrix} \quad p_1 > 0, p_2 > 0, \dots \quad p_1 + p_2 + \dots = 1$$

Neka je $Y = \varphi(X)$ nova slučajna promenljiva, određena neprekidnom funkcijom φ. Zakon raspodele slučajne promenljive Y je

$$Y : \begin{pmatrix} \varphi(x_1) & \varphi(x_2) & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}$$

Funkcije slučajne promenljive

- Neka je X neprekidna sp sa f-jom raspodele F_X i gustinom raspodele g_X, i neka je $Y = \varphi(X)$ sp sa f-jom raspodele F_Y i gustinom raspodele g_Y. Imamo da je

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(\varphi(X) < y)$$

- Ako je $\varphi(t)$, $t \in R$ neprekidna monotona rastuća f-ja i ψ njena inverzna funkcija, tada važi

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(\varphi(X) < y) = \mathrm{P}(X < \psi(y)) = F_X(\psi(y))$$

Gustine slučajne promenljive

- U slučaju apsolutno neprekidnih raspodela i diferencijalnih funkcija φ i ψ, gustina za Y ako je φ monotono rastuća funkcija:

$$g_Y(y) = F_Y'(y) = g_X(\psi(y))\psi'(y)$$

- Odnosno, ako je φ monotona opadajuća funkcija

$$g_Y(y) = F_Y'(y) = -g_X(\psi(y))\psi'(y)$$

Primer funkcije sl. prom.

- Odrediti zakon raspodele sl. prom. $Y=X^2-4$, ako je dat zakon raspodele za slučajnu promenljivu X sa:

$$X:\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Za $P[Y=-3]=0{,}2+0{,}5=0{,}7$. Zakon raspodele za Y je:

$$Y:\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

Koristili smo svojstvo $\varphi(x_j)=\varphi(x_k)=\lambda \Rightarrow P[Y=\lambda]=p_j+p_k$

Dvodimenzionalne slučajne promenljive

- **Definicija. Neka su X i Y slučajne promenljive definisane nad (Ω, $\mathcal{F}$, P). Tada uređeni par (X, Y) predstavlja dvodimenzionalnu slučajnu promenljivu**.
- Ako u R^2 postoji diskretan skup tačaka S takav da je P[(X, Y)$\in$S]=1, tada je (X, Y) **diskretna slučajna promenljiva.**
- Neka su x_1, x_2, … vrednosti sluč. prom. X i neka su y_1, y_2, ... vrednosti sluč. prom. Y. Slučajna promenljiva (X, Y) će imati vrednosti (x_j, y_k) sa verovatnoćama p_{jk}=P[X=$x_j \cap$ Y=y_k], $j\in J\subseteq N$, $j\in K\subseteq N$
- Umesto P[X=$x_j \cap$ Y=y_k] se piše P[X=x_j, Y=y_k].

Primer dvodimenzione sl. prom.

- Iz kutije u kojoj se nalaze 3 bele, 2 plave i 1 crvena kuglica, biraju se, na slučajan način, istovremeno dve kuglice. Neka je X broj belih kuglica, a Y broj crvenih kuglica među izabranim kuglicama. Odrediti zakon raspodele slučajne promenljive (X, Y). Odrediti verovatnoće P[$X \leq Y$], [X+$Y \geq 1$].

$$P[X=1, Y=0] = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{0}}{\binom{6}{2}} = \frac{6}{15}$$

$$P[X=1, Y=1] = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{0}\binom{1}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{3}{15}$$

X* \ *Y	0	1
0	1/15	2/15
1	6/15	3/15
2	3/15	0

P[$X \leq Y$]= P[X=0, Y=0]+P[X=0, Y=1] + P[X=1, Y=1] = 6/15

P[X+$Y \geq 1$]= 1-P[X+Y<1]=1-P[X+Y=0] = 1-P[X=0, Y=0] = 14/15

Funkcija raspodele

- **Neka je data dvodimenzionalna slučajna poremnljiva (X, Y) . Tada je funkcija**

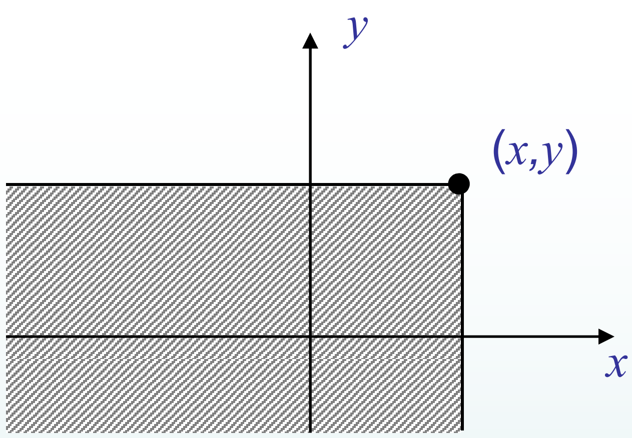
  $F(x,y)$=P [$\omega/X(\omega) \leq x \cap Y(\omega) \leq y$], $x, y \in R$

  funkcija raspodele slučajne promenljive (X, Y).

  Uobičajeno da se piše $F(x,y)$= P [$X \leq x$, $Y \leq y$].

Osobine funkcije raspodele

$F(x,y) = \mathrm{P}\,[X<x,\ Y<y]$



- $F(x,y)$ je neopadajuća, jer

  $F(x_1,y) \leq F(x_2,y)$ za $x_1<x_2$

  $F(x,y_1) \leq F(x,y_2)$ za $y_1<y_2$

- $F(-\infty,y)= F(x,-\infty)=0$, $F(\infty,\infty)=1$
  ako desnu granicu šrafirane oblasti pomeramo ulevo $(x\rightarrow -\infty)$ ili $(y\rightarrow -\infty)$, verovatnoća $F(x,y)$ da sl. tačka padne u oblast $X\leq x$, $Y\leq y$ teži nuli.
- Neprekidna je sa desne strane
- $\mathrm{P}[a_1<X \leq b_1, a_2<Y\leq b_2]= F(b_1,b_2)-F(b_1,a_2)-F(a_1,b_2)+F(a_1,a_2)$

Apsolutno neprekidna slučajna promenljiva

- **Neka je data dvodimenzionalna slučajna promenljiva (X, Y) čija je funkcija raspodele F. Ako postoji funkcija $g(x,y)$ tako da je**

$$g(x,y) \geq 0 \quad (x,y) \in R^2$$

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} g(t,s) \mathrm{d}t \mathrm{d}s$$

Tada je (X, Y) *apsolutno neprekidna dvodimenzionalna slučajna promenljiva* i $g(x,y)$ je njena *gustina raspodele* .

Osobine gustine raspodele an2Dsp

- Analogne osobinama gustine raspodele jednodimenzionalne slučajne promenljive:

$$g(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(t,s)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s=1$$

Marginalni zakon raspodele

- Neka je (X, Y) diskretna slučajna promenljiva, neka su $x_1, x_2, \ldots$ vrednosti sluč. prom. X i neka su $y_1, y_2, \ldots$ vrednosti sluč. prom. Y. Neka je poznat ***zajednički zakon raspodele***:

$$p_{ij}=\mathrm{P}[X=x_i,\ Y=y_j],\ i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m$$

- Zakon raspodele za X se naziva ***marginalni zakon raspodele*** i može se odrediti iz zajedničkog zakona raspodele:

$$r_i = P[X = x_i] = \sum_{j=1}^{m} P[X = x_i, Y = y_j]$$

Za Y

$$s_j = P[Y = y_j] = \sum_{i=1}^{n} P[X = x_i, Y = y_j]$$

Marginalne funkcije raspodele

- Funkcije raspodele slučajnih pormenljivih X i Y se mogu dobiti iz zajedničke funkcije raspodele. Funkcija:

$$F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F(x, y) = F(x, \infty)$$

je ***marginalna funkcija raspodele pormenljive*** X, a funkcija:

$$F_Y(y) = \lim_{x \to +\infty} F(x, y) = F(\infty, y)$$

je ***marginalna funkcija raspodele pormenljive*** Y.

Marginalne gustine raspodele

- Funkcije $F'_X(x) = g_X(x)$ i $F'_Y(y) = g_Y(y)$ su ***marginalne gustine raspodele promenljivih***.
- Mogu se dobiti i iz zajedničke gustine:

$$g_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)\mathrm{d}y$$

$$g_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)\mathrm{d}x$$

Nezavisnost slučajnih promenljivih

- Neka su S_1 i S_2 Borelovi skupovi. Ako za slučajne promenljive X i Y važi

$$P[X \in S_1,\ Y \in S_2] = P[X \in S_1] \cdot P[Y \in S_2],$$

Tada su X i Y ***nezavisne slučajne promenljive***.

Borelov skup

- Borelov skupov se dobijaja od najviše prebrojivo mnogo intervala oblika (a,b) posle primene najviše prebrojivo mnogo operacija unija, presek i komplement.
- To su intervali koji su otvoreni (a,b), zatvoreni na jednom kraju $[a,b)$, $(a,b]$, zatvoreni $[a,b]$ i oblika $(-\infty,a)$, (a,∞), $(-\infty,\infty)$, kao i svi brojevi pojedinačno i prebrojivi nizovi realnih brojeva.
- Pojedinačni broj se dobija

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(a-\frac{1}{n},a+\frac{1}{n})=a\in R$$

Nezavisnost sl. promenljivih

- U slučaju nezavisnosti, zajednička funkcija raspodele je proizvod marginalnih funkcija raspodele:

$$F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

- Za *nezavisne diskretne* slučajne promenljive važi:

$$\mathrm{P}[X=x_i,\ Y=y_j] = \mathrm{P}[X=x_i] \cdot \mathrm{P}[Y=y_j]$$

  za svaki par vrednosti (x_i, y_j). To znači da je u slučaju nezavisnosti moguće dobiti zajedničku raspodelu na osnovu marginalnih raspodela.

- Za *nezavisne neprekidne* slučajne promenljive zajednička gustina raspodele je

$$g(x,y) = g_X(x) \cdot g_Y(y)$$

Primer marginalne raspodele i nezavisnosti sp

- Iz kutije u kojoj se nalaze 3 bele, 2 plave i 1 crvena kuglica, biraju se, na slučajan način, istovremeno dve kuglice. Neka je X broj belih kuglica, a Y broj crvenih kuglica među izabranim kuglicama. Odrediti marginalne raspodele slučajne promenljive (X, Y) i ispitati nezavisnost slučajnih promenljivih.

$X \backslash Y$	0	1		
0	1/15	2/15	3/15	r_1
1	6/15	3/15	9/15	r_2
2	3/15	0	3/15	r_3
	10/15	5/15	**1**	
	s_1	s_2		

Sabirajući verovatnoće po vrstama, dobijamo verovatnoće u zakonu raspodele za X:
P[X=0]=P[X=0, Y=0]+ P[X=0, Y=1]

P[X=0, Y=0]$\neq$P[X=0] P[Y=0], pa su promenljive X i Y zavisne.

Marginalne raspodele za diskretnu sp

$$p_{ij} = P[X = x_i, Y = y_j]$$

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_k	
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1k}	r_1
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2k}	r_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\dots$	p_{mk}	r_m
	s_1	s_2		s_k	**1**

$$r_1 = P[X = x_1] = \sum_{j=1}^{k} p_{1j}$$

$$r_2 = P[X = x_2] = \sum_{j=1}^{k} p_{2j}$$

$$r_m = P[X = x_2] = \sum_{j=1}^{k} p_{mj}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$$

$$s_1 = P[Y = y_1] = \sum_{i=1}^{m} p_{i1} \qquad s_k = P[Y = y_k] = \sum_{i=1}^{m} p_{ik}$$

- U slučaju nezavisnosti: $(\forall i, j)$ $p_{i,j} = r_i \cdot s_j$
- Ako postoji $p_{i,j}=0$, onda su sigurno sp X i Y ***zavisne***.

Raspodela zbira dve sp

- Neka su date sp X i Y koje su ***diskretnog*** tipa i neka su poznati njihovi zakoni raspodele

$$r_i=\mathrm{P}[X=x_i],\ i\in I\subseteq N,\ s_j=\mathrm{P}[Y=y_j],\ j\in J\subseteq N,$$

- Kao i verovatnoće iz zajedničkog zakona raspodele

$$p_{ij}=\mathrm{P}[X=x_i,\ Y=y_j],\ i\in I,\ j\in J.$$

- Neka je $Z=X+Y$. Tada je zakon raspodele za Z:

$$P[Z=z]=\sum_{x_i+y_j=z} P[X=x_i]P[Y=z-x_i]=\sum_{x_i+y_j=z} p_{ij}$$

Raspodela zbira dve neprekidne sp

- Ako su X i Y ***neprekidnog*** tipa sa zajedničkom gustinom raspodele $g(x,y)$, a $Z=X+Y$. Tada je funkcija raspodele za Z:

$$F_Z(z) = \int_{x+y<z} g(x,y)\mathrm{d}y$$

Uslovna raspodela

- Ako su X i Y ***diskretne*** sp sa zakonima raspodele

$$r_i = \mathrm{P}[X = x_i],\ i \in I \subseteq N,\ s_j = \mathrm{P}[Y = y_j],\ j \in J \subseteq N,$$

  i zajedničkom dvodimenzionalnom raspodelom

$$p_{ij} = \mathrm{P}[X = x_i,\ Y = y_j],\ i \in I,\ j \in J.$$

- Tada je ***uslovna raspodela*** sp Y pri uslovu da X ima vrednost jednaku x_i

$$P[Y = y_j / X = x_i] = \frac{p_{ij}}{r_i}, i \in I, j \in J$$

- Ako posmatrane sp X i Y imaju gustine raspodele $g_X(x)$ i $g_Y(y)$ i zajedničku gustinu raspodele $g(x,y)$, tada je uslovna gustina $g(y/x)$ raspodele sp Y ako je poznata vrednost $X=x$

$$g(y/x) = \frac{g(x,y)}{g_X(x)} \qquad g_X(x) \neq 0$$