Jednodimenzionalne slučajne promenljive

Definicija slučajne promenljive

- Neka je X f-ja def. na prostoru verovatnoća (Ω, $\mathcal{F}$, P) koja preslikava prostor el. ishoda Ω u skup R realnih brojeva:

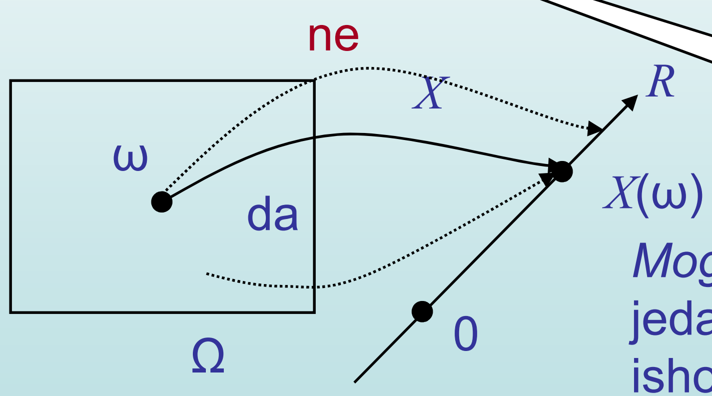
  (1)Skup $\{\omega / X(\omega) \leq x\}$ je dog. koji pripada $\mathcal{F}$, za svako $x \in R$

  (2)$P\{\omega / X(\omega)=\infty\} = P\{\omega / X(\omega)=-\infty\}=0$

- Tada je X **slučajna promenljiva**.

Merljivost, jer na $\mathcal{F}$-u verovat. def. kao mera

Finitnost, "skoro nemoguć dog."



Moguće da se više ishoda preslika u jedan broj, *nije moguće* da se jedan ishod preslika u dva broja

$\Omega \rightarrow R^1$ (jednodimenzion. sl. prom.), $\Omega \rightarrow R^2$ (dvodimenzion. sl. prom.)

Slučajna promenljiva

- Koristićemo sledeće oznake:

  $[X \leq x]$ ili $\{X \leq x\}$ za $\{\omega / X(\omega) \leq x\}$

  $[X=x]$ ili $\{X=x\}$ za $\{\omega / X(\omega)=x\}$

- Ravnopravno se koristi i termin **slučajna veličina**.
- **Diskretne** slučajne promenljive ($X(\omega)$ – skup vrednosti preslikavanja je *konačan* ili *prebrojiv*)
- **Neprekidne** slučajne promenljive ($X(\omega) \rightarrow$ *neprebrojiv*)
- **Mešovite** slučajne promenljive

Diskretne slučajne promenljive

- Neka je $\{x_1,\ldots, x_n\}$ skup vrednosti slučajne promenljive X i neka je:
- P[X= x_k]=p_k, $k = 1,\ldots,n$.
- Tada imamo zakon raspodele (verovatnoća) sl. prom. X

$$X : \begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ p_1 \ldots p_n \end{pmatrix} \qquad x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

X je **diskretna slučajna promenljiva** (sa konačno mnogo vrednosti).

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$$

Zakon raspodele sl. prom. je preslikavanje koje vrednostima sl. prom. dodeljuje odgovarajuće verovatnoće.

Primer slučajne promenljive

- Pri bacanju numerisane kocke igrač dobija ili plaća određenu sumu od X dinara, u zavisnosti od broja k koji se dobija na gornjoj strani kocke:

$$X = \begin{cases} k, & k = 4 \quad \text{ili } 5 \\ -3k, & k = 1 \quad \text{ili } 2 \\ 0, & k = 3 \quad \text{ili } 6 \end{cases}$$

- Pokazati da tako definisana funkcija X predstavlja slučajnu promenljivu.
- Označimo sa ω_k el. ishod: dobijen je broj k. Tada imamo preslikavanje:

$$\omega_1 \to -3,\ \omega_2 \to -6,\ \omega_3 \to 0,\ \omega_4 \to 4,\ \omega_5 \to 5,\ \omega_6 \to 0$$

Primer, nastavak

- Uslov (2) je ispunjen. Uslov (1), u zavisnosti od vrednosti realnog broja x imamo:
- Ako je $x<-6$, tada je $\{\omega / X(\omega) \le x\} = [X \le x] = \emptyset \in \mathcal{F}$
- Ako je $-6 \le x<-3$, tada je $[X \le x]=\{\omega_2\} \in \mathcal{F}$
- Ako je $-3 \le x<0$, tada je $[X \le x]=\{\omega_1, \omega_2\} \in \mathcal{F}$
- Ako je $0 \le x<4$, tada je $[X \le x]=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_6\} \in \mathcal{F}$
- Ako je $4 \le x<5$, tada je $[X \le x]=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6\} \in \mathcal{F}$
- Ako je $5 \le x$, tada je $[X \le x]=\Omega \in \mathcal{F}$
- Zakon raspodele ove slučajne promenljive je:

$$X : \begin{pmatrix} -6 & -3 & 0 & 4 & 5 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Indikator događaja

- Neka su dati:
  Ω, sluč. dog. $A \subseteq \Omega$, polje događaja $\mathcal{F}=\{\emptyset, \Omega, A, \bar{A}\}$ i neka je P verovatnoća na $\mathcal{F}$.

  Preslikavanje X: $\Omega \to R$ zadato sa
  $X(\omega)=1,\ \omega \in A$ i $X(\omega)=0,\ \omega \in \bar{A}$
  je slučajna promenljiva – **indikator slučajnog događaja** A.

$$I_A : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ P(\overline{A}) & P(A) \end{pmatrix}$$

Elementarna slučajna promenljiva

- Ako je skup slučajne promenljive X prebrojiv, tj. ako je njen zakon raspodele oblika:

$$X:\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \ldots \\ p_1 \ldots p_n \ldots \end{pmatrix} \qquad p_1 + \ldots + p_n + \ldots = 1,\ p_j > 0,\ j \in N$$

- X je **elementarna slučajna promenljiva**.

- Slučajne promenljive su opštije od slučajnih događaja, jer opisuju jedan prostor elementarnih ishoda u celini.

Funkcija raspodele

- **Definicija: Neka je X slučajna promenljiva. Realna funkcija F definisana jednakošću:**

  $F(x)$=P{ω/ $X(\omega) \leq x$} = P[$X \leq x$], $x \in R$

  je funkcija raspodele slučajne promenljive X.
- Primer. Odrediti funkciju raspodele diskretne slučajne promenljive X čiji je zakon raspodele:

$$X : \begin{pmatrix} -6 & -3 & 0 & 4 & 5 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

- U zavisnosti od vrednosti realnog broja x računamo verovatnoće oblika P[$X \leq x$].

Osobine funkcije raspodele

- Teorema. Ako je F funkcija raspodele neke slučajne promenljive, tada je:

  a) F neopadajuća funkcija

  b) $F(-\infty)=0$, $F(\infty)=1$,

  c) F neprekidna sa desne strane za svako $x \in R$

- Dokaz. Neka su a i b realni brojevi takvi da je $a<b$. Treba dokazati da je $F(a) \leq F(b)$.

  a)Imamo da je $\{\omega / X(\omega) \leq a\} \subset \{\omega / X(\omega) \leq b\}$.
  Zato: $F(a)=P\{\omega / X(\omega) \leq a\} \leq P\{\omega / X(\omega) \leq b\}=F(b)$.

  b) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$ (jer $P(X=-\infty)=0$)

  $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$ (jer $(X \leq x) \to \Omega$), kada $x\to\infty$

  c) $\lim\limits_{x\to x_0} F(x)=F(x_0)$

Funkcija raspodele dsp

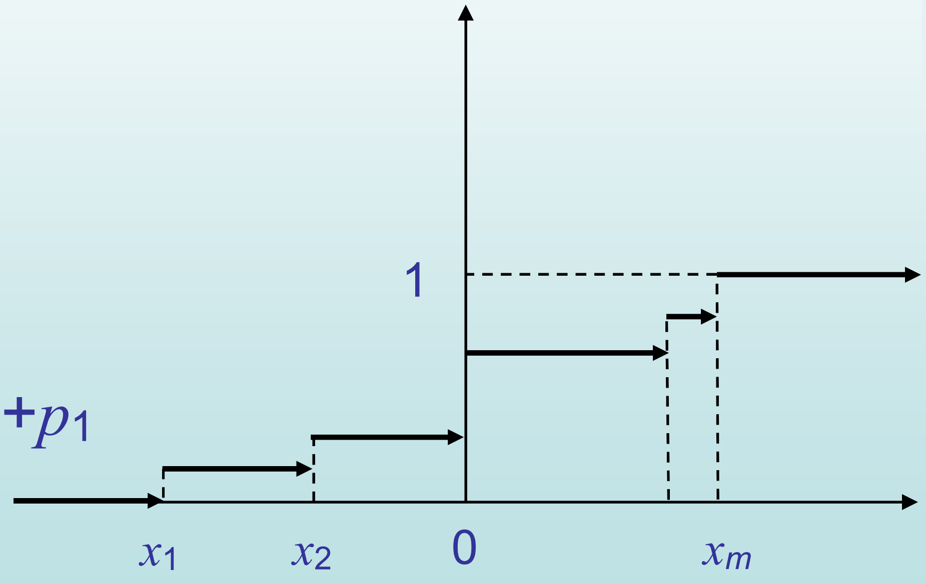
- Za diskretne slučajne promenljive sa konačno mnogo vrednosti postoji karakteristični oblik funkcije raspodele

$$X:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}$$

- Za svako $x < x_1$, $F(x)=0$
- Za svako $x \in [x_1, x_2)$, $F(x)=p_1$

  Kada je x iz ovog intervala, imamo samo x_1 sa ver. p_1
- Za svako $x \in [x_2, x_3)$, $F(x)=p_2+p_1$

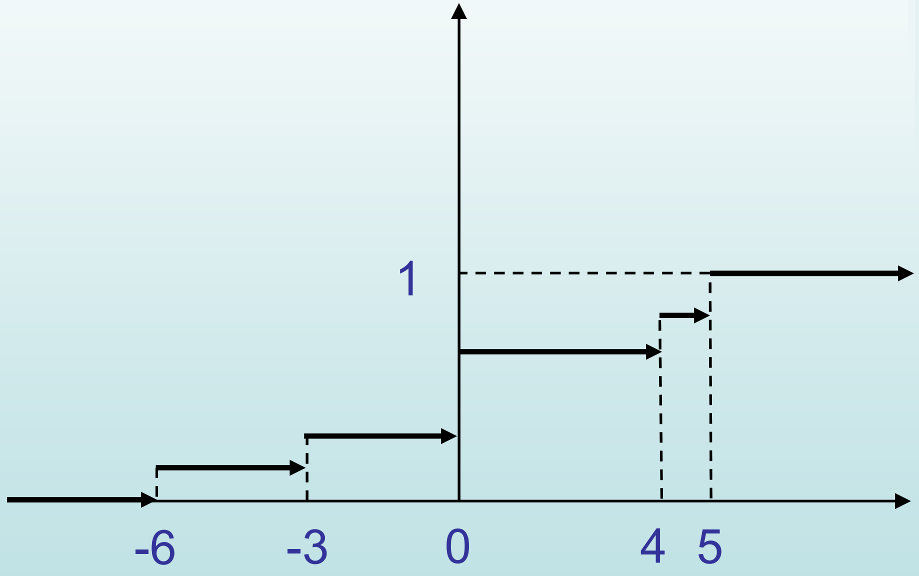
  ...
- Za svako $x \geq x_m$, $F(x)=1$



Primer funkcije raspodele

- Ako je -6 $\leq x < 3$, tada je P[$X \leq x$]={ω_2}=1/6
- Na osnovu toga možemo napisati izraz za funkciju raspodele i skicirati grafik.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-6, \\ 1/6, & -6\leq x<-3, \\ 2/6, & -3\leq x<0, \\ 4/6, & 0\leq x<4, \\ 5/6, & 4\leq x<5, \\ 1, & 5\leq x. \end{cases}$$



F-ja raspodele – sl. promenljiva

- Teorema. Za svaku f-ju koja ima osobine a-c, postoji sl. prom. kojoj je to f-ja raspodele. Ta sl. prom. je određena do na dog. verovatnoće nula (tj. ako su X i Y sl. prom. i $F(t)$ f-ja raspodele i za X i za Y):
- $F(t)$=P(X<t)
- $F(t)$=P(Y<t), za svako $t \in R$, onda je
- P($X \neq Y$)=0 $\rightarrow$ mogu da se razlikuju ali ti elementarni ishodi imaju verovatnoću nula:
- P{ω/ X(ω)$\neq$$Y$(ω)}=0
- Teorema. Pošto je f-ja neprekidna, ograničena i neopadajuća može imate najviše prebrojivo mnogo tačaka prekida prve vrste.

Zakon raspodele verovatnoća

- Zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive je pravilo po kome svakoj vrednosti slučajne promenljive pridružujemo odgovarajuću verovatnoću.
- Raspodela verovatnoća kao potpuna karakteristika postoji samo za diskretne slučajne promenljive.
- Za neprekidnu slučajnu promenljivu ne može se formirati raspodela verovatnoća, jer ima beskonačno mnogo vrednosti koje ispunjavaju neki interval (neprebrojiv skup vrednosti).
- Do univerzalne karakteristike za sl. prom. doći ćemo ako posmatramo verovatnoće dog. $X \leq x$, a ne $X=x$. Funkcija je x i naziva se **funkcijom raspodele verovatnoća**.

Računanje verovatnoće događaja

- Pomoću funkcije raspodele možemo računati verovatnoće događaja vezanih za posmatranu sl. prom.
- Pomoću f-je raspodele sl. prom. X možemo da izrazimo verovatnoću nejednakosti $a < X \leq b$, a i b proizvoljni realni brojevi.
- P[$a < X \leq b$]=$F(b)$-$F(a)$ (*)
- Specijalno, iz (*) dobijamo

  P[$X = a$]=lim $F(x)$-$F(a)$, $x \to a$, $x > a$
- To znači da ako je a tačka neprekidnosti funkcije F, tada

  P[$X = a$]=0

Jednakosti za f-ju raspodele

- Po definiciji: P[$X \le b$]=$F(b)$
- Važe i jednakosti:
- P[$X \ge b$]=1-$F(b)$+ P[$X = b$]
- P[$X > b$]=1-$F(b)$

- Ako je F neprekidna u a, onda P[$X > a$]= P[$X \ge a$]

Apsolutno neprekidne sluč. prom.

- **Definicija. Neka je data sluč. promenljiva X. Ako postoji funkcija $g(x)$, $x \in R$, sa svojstvima:**

  1. $g(x) \geq 0$,
  2. $\mathrm{P}[X < x] = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$

nenegativna

integrabilna

Tada je X apsolutno neprekidna slučajna promenljiva, a $g(x)$ njena gustina raspodele.

Definicija. Ako izvod funkcije raspodele slučajne promenljive X postoji i jednak je nuli skoro svuda, tada je X *singularna slučajna promenljiva*.

Diskretna slučajna promenljiva nema gustinu raspodele.

Gustina raspodele

- Na osnovu osobina funkcije raspodele i uslova 2. prethodne definicije zaključujemo da gustina raspodele mora imati svojstvo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\mathrm{d}t = 1$$

- Ako je X ansp sa gustinom raspodele $g(x)$ i funkcijom raspodele $F(x)$, tada je:

$$1^\circ\ g(x) = F'(x)$$

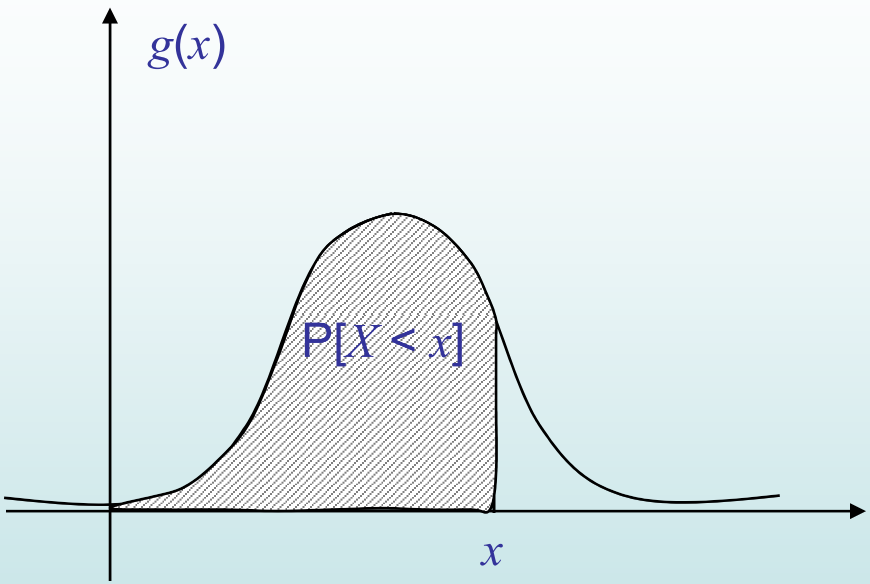
$$2^\circ\ P[a \le X < b] = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \quad a, b \in R \quad a \le b$$

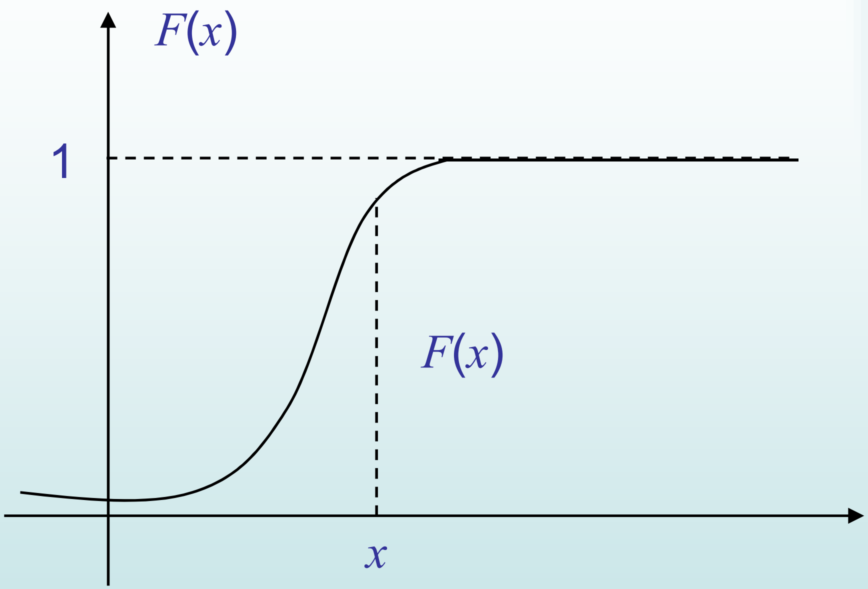
$$3^\circ\ P[X = a] = 0 \quad \forall x \in R$$

Gustina i funkcija raspodele

- $F(x)$ = P[$X < x$] = P[- $\infty < X < x$]

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} g(x)\mathrm{d}x$$





Primer gustine i f-je raspodele

- Odrediti konstantu c tako da funkcija $g(x)$, $x \in R$, predstavlja gustinu raspodele, a zatim odrediti odgovarajuću funkciju raspodele, ako je:

$$g(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [-1,0) \\ c, & x \in [0,2] \\ 0, & x \notin [-1,2] \end{cases}$$

- Ako je g gustina raspodele sl. prom. X, odrediti verovatnoću P{$X \in [0,1)$}.
- Iz uslova

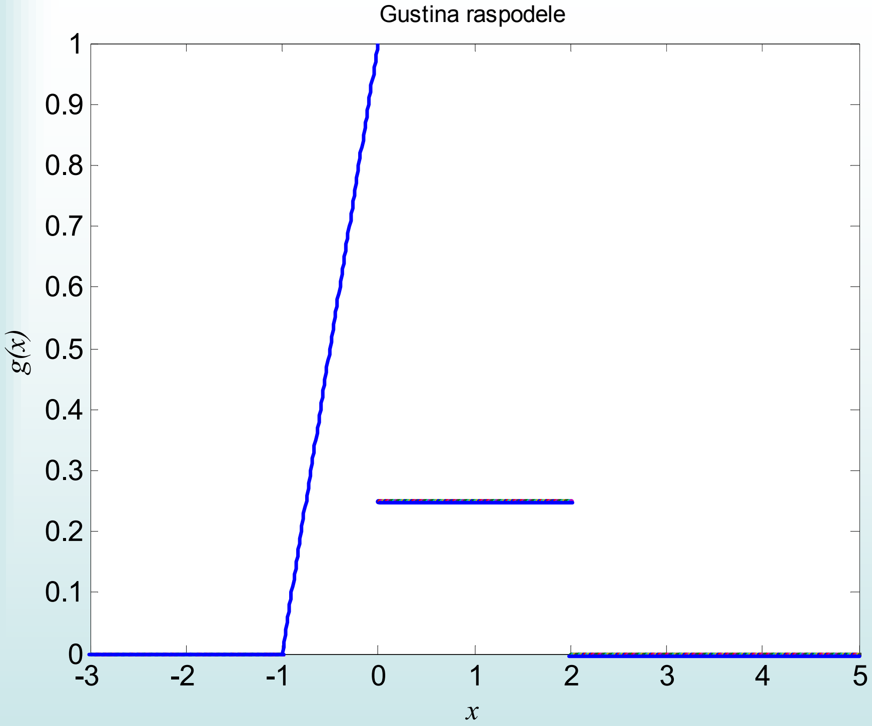
$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\mathrm{d}t = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{4}$$

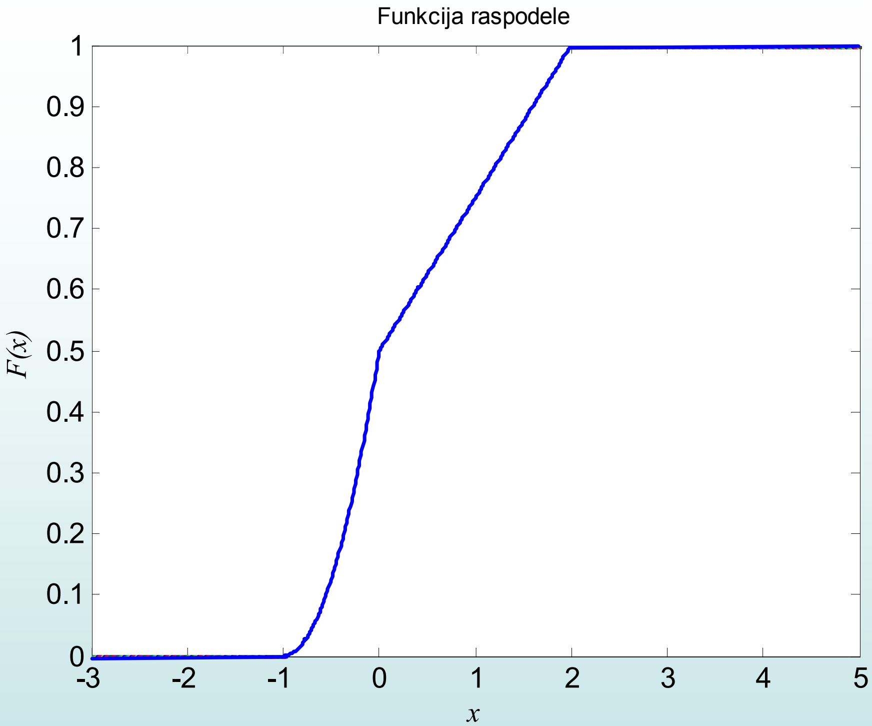
Primer gustine i f-je raspodele, nast.

- Za x<-1, važi $F(x)=\int_{-\infty}^{x}0\mathrm{d}t=0$
- Za -1 $\leq x$< 0, važi $F(x)=\int_{-\infty}^{-1}0\mathrm{d}t+\int_{-1}^{x}(t+1)\mathrm{d}t=\frac{(x+1)^2}{2}$
- Za 0 $\leq x$< 2, važi $F(x)=\int_{-\infty}^{-1}0\mathrm{d}t+\int_{-1}^{0}(t+1)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}\frac{1}{4}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}+\frac{x}{4}$
- Za 2 $\leq x$, važi $F(x)=1$

P{$X\in$(0,1]}=F(1)-F(0)=1/4

Primer gustine i f-je raspodele





Mešovite slučajne promenljive

- Imaju neprebrojivo mnogo vrednosti.
- Najviše prebrojivo mnogo vrednosti se postiže sa verovatnoćom različitom od nule.
- Ostalih neprebrojivo mnogo vrednosti se postiže sa verovatnoćom jednakom nula.