Uslovne verovatnoće

- Posmatramo dva slučajna dog. A i B. Ako je poznato da se jedan od njih ostvario, treba odrediti verovatnoću da se ostvario i drugi.
- **Def. Neka su A i B slučajni događaji iz istog prostora verovatnoća (Ω, $\mathcal{F}$, P) i neka je P(B)>0. Tada je uslovna verovatnoća događaja A, ako se desio događaj B, jednaka**:

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$P_B(A)$$

Primer uslovne verovatnoće

- Na slučajan način se bira jedna karta iz špila od 52 karte. Ako je poznato da je izabrana karta “herc”, odrediti verovatnoću da je ta karta “desetka”.
- Neka je A dog - slučajno izabrana karta je “desetka”,
  B dog - slučajno izabrana karta je “herc”.
  Treba odrediti $P(A/B)$.
  Dog. AB označava da je ozabrana “desetka herc”,
  $P(AB)=1/52$, $P(B)=13/52$, sledi $P(A/B)=1/13$.

Osobine uslovne verovatnoće

- Važe aksiome B1°, B2° i B3°:

$$P(A/B) \geq 0 \qquad P(\Omega/B) = 1 \qquad P[(\sum_j A_j)/B] = \sum_j P(A_j/B)$$

- Na osnovu Teoreme 3, važe i ostale osobine:
- $P(\bar{A}/B)=1-P(A/B)$, $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow P(A_1/B) \leq P(A_2/B)$, itd.

Nezavisnost događaja

- Definicija 12. **Neka su događaji A i B iz istog prostora verovatnoća. Ako važi P(AB)=P(A)P(B), tada su događaji A i B nezavisni.**
- Za nezavisne događaje A i B važi P(A/B)=P(A) i P(B/A)=P(B).
- Ako su događaji nezavisni, to ne znači da su disjunktni.
- A i B su disjunktni akko AB=Ø (P(AB)=0)
- Proizvoljan dog. A i nemoguć događaj su nezavisni dog.

Nezavisnost događaja, nastavak

- Ako su dog. A i B nezavisni i bar jedan od njih nemoguć događaj, onda su oni disjunktni. Ako su dog. A i B disjunktni, a ni jedan od njih nije nemoguć, tada su A i B zavisni događaji.

- Ako su A i B nezavisni, onda su i A i $\bar{B}$, $\bar{A}$ i B, i $\bar{A}$ i $\bar{B}$ nez.

Nezavisnost više događaja

- Ako posmatramo više od dva događaja njihova **nezavisnost u ukupnosti** označava da je verovatnoća preseka bilo koja dva od tih događaja jednaka proizvodu verovatnoća ta dva događaja (**nezavisnot u parovima**), itd.
- Primer: dog. A, B i C su nezavisni ako važe relacije

$$P(AB)=P(A)P(B),\ P(AC)=P(A)P(C),\ P(BC)=P(B)P(C) \text{ i } P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

Ako treba ispitati nezavisnost n događaja, tada treba proveriti $2^n - n - 1$ jednakosti.

Nezavisnost četiri događaja

- Primer: dog. A, B, C i D su nezavisni akko važe relacije

$$P(AB)=P(A)P(B),\ P(AC)=P(A)P(C),\ P(AD)=P(A)P(D),$$
$$P(BC)=P(B)P(C),\ P(BD)=P(B)P(D),\ P(CD)=P(C)P(D),$$
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C),\ P(ABD)=P(A)P(B)P(D),$$
$$P(BCD)=P(B)P(C)P(D),\ P(ACD)=P(A)P(C)P(D),$$
$$P(ABCD)=P(A)P(B)P(C)P(D)$$

Primer šarene piramide

- Pravilna trostrana piramida ima jednu stranu obojenu belom bojom, jednu crvenom, jednu crnom, a četvrta strana je trobojna: bela, crvena i crna. Piramida se baca i beleži se strana na koju piramida pada. Ispitati nezavisnost dog. A: na osnovi ima bele boje, B: na osnovi ima crvene boje i C: na osnovi ima crne boje.
- $P(A)=P(B)=P(C)=2/4$
- $P(AB)= P(AC)= P(BC)=1/4$
- $P(ABC)=1/4$
- Dog. A, B i C su nezavisni u parovima, ali je $P(ABC)\neq P(A)P(B)P(C) \Rightarrow$ dog. A, B i C nisu nezavisni u ukupnosti

Primer – “ratne igre”

- U vazdušnoj bici učestvuju lovac i bombarder. Prvo lovac gađa bombardera i obara ga sa verovatnoćom 0,2. Ako bombarder nije oboren, uzvraća paljbu i obara lovca sa verovatnoćom 0,3. Ako lovac pri tome nije oboren, bliže je bombarderu i obara ga sa verovatnoćom 0,4. Odrediti verovatnoće dog. A-oboren bombarder, B-oboren lovac i C-ni jedan od aviona nije oboren.
- Dog. A je unija disjunktnih dog. A_1-lovac obara bombardera pri prvom gađanju, A_2-lovac obara bombardera pri drugom gađanju
- $P(A)=P(A_1 \cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)$, jer $A_1 \cap A_2=\emptyset$
- $P(A_1)=0{,}2$

Primer, nastavak

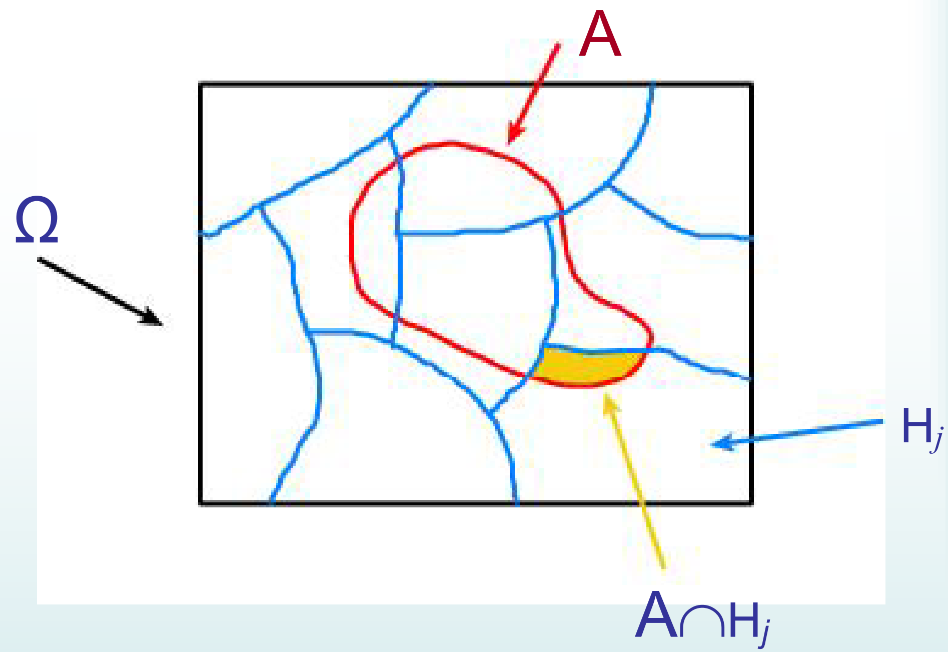
- Dog. A_2 posmatramo kao presek događaja
  D-lovac ne obara bombardera pri prvom gađanju
  E-bombarder ne obara lovca pri prvom gađanju
  F-lovac obara bombardera pri drugom gađanju
- $P(A_2)=P(D)P(E/D)P(F/DE)=(1-0,2)(1-0,3)0,4=0,224$
- $P(A)=0,424$
- Dog. B možemo posmatrati kao presek dog. D i $\overline{E}$

$$P(B)=P(D\overline{E})=P(D)P(\overline{E}/D)=(1-0,2)0,3=0,24$$

- A, B, C i D čine potpun sistem dog, pa je
  $P(C)=1-(P(A)+P(B))=0,336$

Formula potpune verovatnoće

- Neka su $H_1, H_2, \ldots, H_n$ slučajni dog. koji čine potpun sistem događaja i neka je A neki dog. iz istog prostora verovatnoća. Verovatnoća dog. A je



$$\boxed{P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(H_j) P(A/H_j)}$$

Formula potpune verovatnoće

- Slučajni dog. H_j, $j=1,\ldots,n$ su **hipoteze**.

Dokaz formule potpune verovatnoće

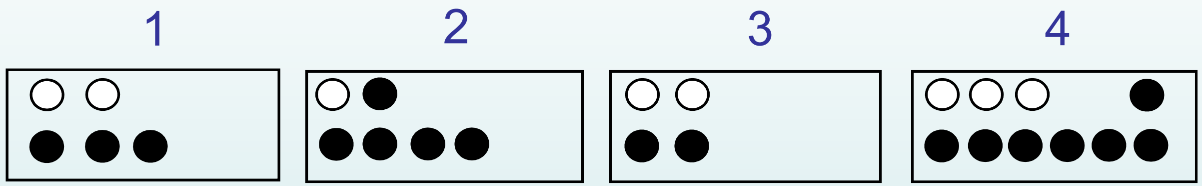
- Zasniva se na sledećoj reprezentaciji:
- $A = A\,\Omega = A \cap (H_1+H_2+\ldots+H_n) = \Sigma AH_j$
- Kako su događaji AH_i i AH_j za $i \neq j$ disjuntkni, verovatnoća dog. A je

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}\left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{AH}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{AH}_j)$$

- Kako je $P(AH_j)=P(H_j)P(A/H_j)$, dobija se formula pv.
- Verovatnoće $P(H_j)$ su ***apriorne verovatnoće hipoteza***
- Ako se zna da se realizovao dog. A, verovatnoće $P(H_j/A)$ su ***aposteriorne verovatnoće hipoteza***

Primer potpune verovatnoće

- U četiri istovetne kutije sa kuglicam jednakih dimenzija, ali različitih boja, na slučajan način se iz jedne od kutija bira jedna kuglica. Odrediti verovatnoću da izabrana kuglica bude bele boje (dog. A).



- H1 – izbor iz kutije 1 $P(H1)=P(H4)=1/4$
- $P(A)=P(A/H1)P(H1)+P(A/H2)P(H2)+P(A/H3)P(H3)+P(A/H4)P(H4)=2/5\bullet 1/4+1/6\bullet 1/4+2/4\bullet 1/4+3/10\bullet 1/4=$
  $=41/120$

Aposteriorne verovatnoće

- Koristeći formulu pv, aposteriorne verovatnoće računamo

$$\boxed{P(H_k / A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(A/H_j)}}$$

Bajesova formula

$$k = 1,\dots,n$$

- U opštem slučaju je $P(H_k) \neq P(H_k/A)$
- Neka su A i B dva događaja iz istog prostora verovatnoća i neka u tom prostoru H_1, H_2,..., H_n čine potpun sistem događaja. Tada važi:

$$P(B/A) = \sum_{j=1}^{n} P(H_j/A)P(B/AH_j)$$

Primer aposter. verovatnoća

- Ako je izabrana bela kuglica, koja je verovatnoća da je iz prve kutije?
- P(H1/A)=P(H1A)/P(A)=P(A/H1)P(H1)/P(A)= (2/5•1/4)/(41/120)=12/41
- P(H2/A)=P(A/H2)P(H2)/P(A)=(1/6•1/4)/(41/120)=5/41
- P(H3/A)=P(A/H3)P(H3)/P(A)=(1/2•1/4)/(41/120)=15/41
- P(H4/A)=P(A/H4)P(H4)/P(A)=(3/10•1/4)/(41/120)=9/41

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{H}_j / \mathrm{A}) = 1$$

Primer vremenske prognoze

- U jednoj oblasti u toku dana može biti ili kišovito ili sunčano vreme. Ako je dan sunčan, verovatnoća da će sledećeg dana padati kiša je 0,2, a ako je dan kišovit, verovatnoća da će sledećeg dana biti sunčano je 0,4. Ako je u četvrtak (14. III) padala kiša, odrediti verovatnoću da u nedelju (17. III) bude sunčano vreme.
- Verovatnoća da će u petak padati kiša je $P(Pk)=0{,}6$, da će biti sunčano $P(Ps)=1-P(Pk)=0{,}4$.
- U subotu, $P(Ss)=P(Ss/Pk)P(Pk)+P(Ss/Ps)P(Ps)=$

  $$=0{,}4\cdot 0{,}6+0{,}8\cdot 0{,}4=0{,}56$$

  $$P(Sk)=1-P(Ss)=0{,}44$$
- U nedelju: $P(Ns)=P(Ns/Sk)P(Sk)+P(Ns/Ss)P(Ss)=$

  $$=0{,}4\cdot 0{,}44+0{,}8\cdot 0{,}56=0{,}624$$

Binomna šema

- Verovatnoća dog. A je P(A)=p. Ako se eksperiment izvodi n puta pod istim uslovima, a sva izvođenja su međusobno nezavisna, tj. P(A)=p, P(Ā)=1- p= q.
- Tada je verovatnoća da se dog. A realizuje tačno k puta (a da se dog. Ā realizuje n-k puta) jednaka:

$$\mathrm{P}_{n,k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad k = 0,1,\ldots,n$$

- Binomnoj šemi odgovara slučajni izbor elemenata sa vraćanjem.

Hipergeometrijske verovatnoće

- Imamo seriju od a artikala, među njima je m artikala prve vrste, a ostalih (a-m) druge vrste. Ako uzmemo n puta sa vraćanjem po jedan artikal, tada je verovatnoća da će među njima biti tačno k artikala prve vrste:

$$\mathrm{P}_{n,k} = \binom{n}{k}\left(\frac{m}{a}\right)^k\left(1-\frac{m}{a}\right)^{n-k} \qquad k = 0,1,\ldots,n$$

- Ako se uzima n puta po jedan artikal, bez vraćanja, verovatnoća da će se dobiti k artikala prve vrste:

Hipergeom. verovatnoće

$$\mathrm{P}^*_{n,k} = \frac{\binom{m}{k}\binom{a-m}{n-k}}{\binom{a}{n}}$$

Ako se a i m povećavaju, tako da $m/a \to p$, tada

$$\mathrm{P}^*_{n,k} \to \mathrm{P}_{n,k}$$