AKSIOMATIKA TEORIJE VEROVATNOĆE

Aksiomatika teorije verovatnoće

- Polazi se od osnovnih stavova, tzv. aksioma, na osnovu kojih se sve ostale osobine mogu dokazati.
- Za posmatrani prostor el. ishoda aksiomatizacija daje odgovore na pitanja:
  - Koje podskupove prostora el. ishoda možemo posmatrati?
  - Kako računati verovatnoće pojavljivanja događaja pri jednom izvođenju eksperimenta?
- Sistem aksioma je dao A. N. Kolmogorov 1933. godine.
- Treba uvesti strukturu na PEI da bismo formulisali formule

Polje događaja

- Definicija 9. Neka je $\mathcal{F}$ familija (skup) događaja iz Ω sa osobinama:
  – A1° Siguran događaj Ω pripada familiji $\mathcal{F}$.
  – A2° Ako neki dog. A pripada familiji $\mathcal{F}$, onda i $\bar{A}$ pripada fam. $\mathcal{F}$.
  – A3° Ako su A i B bilo koja dva događaja koji pripadaju $\mathcal{F}$, tada i njihova unija pripada $\mathcal{F}$.
- Takva familija događaja $\mathcal{F}$ je polje ili algebra događaja.
- Kada se osobina A3° zameni osobinom:
  – A3'° Ako je $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bilo koji konačan ili prebrojiv niz događaja koji pripadaju $\mathcal{F}$, tada i njihova unija pripada $\mathcal{F}$.
- Takva familija događaja $\mathcal{F}$ je σ-polje ili σ- algebra dog.

Polje ili σ-polje događaja

- Može sadržati konačno ili beskonačno mnogo događaja
- Ako je skup el. ishoda konačan skup, tada je i svaka familija događaja iz Ω konačna familija.
- Svako σ-polje događaja je polje događaja, a obrnuto ne važi.
- Nad istim prostorom el. ishoda možemo posmatrati više različitih polja događaja.
- Presek dva polja (σ-polja) dog. je polje (σ-polje) dog.
- Unija dva polja (σ-polja) dog. ne mora biti polje (σ-polje) događaja.

$\mathcal{F}$ partitivni skup

- Ako je $\mathcal{F}$ partitivni skup (skup svih podskupova) skupa Ω, tada za svaki dog. A koji pripada $\mathcal{F}$ i svaki dog. B za koji važi $B \subseteq A$, sledi da B pripada $\mathcal{F}$.
- Ako je Ω konačan skup koji sadrži n elementarnih ishoda, a polje $\mathcal{F}$ je partitivani skup skupa Ω, tada polje $\mathcal{F}$ ima 2^n elemenata.

  $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ PEI pri bacanju numerisane kocke

  $\mathcal{P}(\Omega)=\{\varnothing, \{1\}, \ldots, \{4\}, \{1,2\}, \ldots, \{3,4\}, \ldots, \ldots, \{2,3,4\}, \Omega\}$
- Broj elemenata od $\mathcal{P}$ je

$$\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=2^4=16$$

Primer 4. Polja događaja

- Ako je Ω proizvoljan prostor el. ishoda i $A \subseteq \Omega$, tada je $\mathcal{F}_1 = \{\Omega, \emptyset, A, \bar{A}\}$ polje događaja. I $\mathcal{F}_2 = \{\Omega, \emptyset\}$ je polje (tzv. *trivijalno* polje) događaja.
- Posmatrajmo prostor el. ishoda iz Primera 1 i u tom prostoru el. ishoda dog. A: zbir je paran broj, B: zbir je deljiv sa 6. Odrediti najmanje polje događaja koje sadrži dog. A i B.
  - Jedno od mogućih razlaganja PEI na potpun sistem događaja je: B, $A \backslash B$ i $\bar{A}$. Oni će pripadati polju koje treba formirati. Formiramo $\mathcal{F}_3$ na osnovu Def. 9. Prema A2°, i $\overline{B}$ pripada polju. Takođe, i $\overline{A \backslash B}$ će pripadati polju. I nemoguć dog. pripada polju:

$$\mathcal{F}_3 = \{\Omega_2, \emptyset, A, \bar{A}, B, \overline{B}, A\backslash B, \overline{A \backslash B}\}$$

Teorema 2

- **Ako su A i B događaji koji pripadaju polju (ili σ-polju) događaja $\mathcal{F}$, tada i događaji $A \cap B$ i $A \setminus B$ pripadaju polju (ili σ-polju) $\mathcal{F}$.**
- Dokaz. Na osnovu A2° je $\bar{A} \in \mathcal{F}$ i $\bar{B} \in \mathcal{F}$. Tada je, na osnovu A3° i $\bar{A} \cup \bar{B} \in \mathcal{F}$, pa je na osnovu A2° događaj

$$C = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} \in F$$

- Po De Morganovim obrascima je $C=A \cap B$, pa je dokaz završen.
- Tvrđenje teor. 2: Polje (σ-polje) događaja je zatvoreno u odnosu na presek i u odnosu na razliku događaja.

Minimalno polje generisano kolekcijom C

- Često se polje (σ-polje) određuje polazeći od neke kolekcije C podskupova Ω.
- Za svaku kolekciju C postoje σ-polja koja je sadrže (npr. partitivni skup je jedno takvo σ-polje).
- Presek svih polja (σ-polja) koja sadrže C je polje (σ-polje) koje se naziva **minimalno polje (σ-polje) generisano kolekcijom C**, označava sa σ(C).

Borelovo σ-polje na R

- Ako umesto Ω uzmemo skup realnih brojeva R i kolekciju C koju čine intervali oblika $(-\infty, a)$, $a \in \mathrm{R}$, tada se odgovarajuće minimalno σ-polje generisano kolekcijom C naziva **Borelovo σ-polje na R**, označava sa $\mathcal{B}$.
- Njegovi elementi su Borelovi skupovi.
- Uređeni par $(\mathrm{R}, \mathcal{B})$ je Borelova prava.
- Kolekcije $C=\{(-\infty, a],\ a \in \mathrm{R}\}$ i $C=\{(a, b],\ a < b;\ a, b \in \mathrm{R}\}$ generišu Borelovo σ-polje $\mathcal{B}$.
- Borelovi skupovi i polja se primenjuju pri definisanju slučajnih promenljivih.

Definicija verovatnoće

- Verovatnoće događaja se definišu samo za događaje koji pripadaju nekom polju (ili σ-polju) događaja.
- Definicija 10. Neka realna funkcija P definisana na σ-polju $\mathcal{F}$ događaja iz Ω ima osobine:
  - B1° Za svaki događaj A koji pripada $\mathcal{F}$ važi P(A)≥0.
  - B2° Za siguran događaj Ω važi P(Ω)=1.
  - B3° Za svaki niz (konačan ili prebrojiv) događaja koji pripadaju $\mathcal{F}$ i koji su međusobno disjunktni u parovima važi:

nenegativnost

normiranost

aditivnost verovatnoće

probabilitas

$$P\left(\bigcup_{j} A_j\right) = \sum_{j} P(A_j)$$

- Tada je funkcija P verovatnoća na σ-polju $\mathcal{F}$. Preslikavanje skupa događaja $\mathcal{F} \rightarrow [0,1]$

Aksiome teorije verovatnoće

- A1°, A2°, A3'°, B1°, B2°, B3°.
- **Prostor verovatnoća** je uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
- Aksiomama B1°, B2°, B3° verovatnoća nije jednoznačno određena. Primer: Neka je na elementima polja $\mathcal{F}_1=\{\Omega, \emptyset, A, \bar{A}\}$ definisana funkcija P: $P(A)=p$, $P(\bar{A})=1-p$, $P(\Omega)=1$, $P(\emptyset)=0$. Tada je P verovatnoća u smislu aksiomatike.
  - Kako p može biti bilo koji broj iz intervala (0,1), sledi da verovatnoća na polju $\mathcal{F}_1$ nije jednoznačno određena.

Osobine verovatnoće - Teorema 3.

- 1° Ako je $A \subseteq B$, tada je $P(A) \leq P(B)$.

monotonost verovatnoće

- 2° Ako je P(A) verovatnoća dog. A, tada je $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- Verovatnoća nemogućeg događaja je $P(\Phi) = 0$.
- 3° Ako su A i B dva događaja, tada je
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$
- 4° Ako je $A_1, A_2, \ldots$ konačan ili prebrojiv niz događaja, tada je
$$P\left(\bigcup_{j} A_j\right) \leq \sum_{j} P(A_j)$$

Bulova nejednakost

- 5° Ako događaji $A_1, A_2, \ldots, A_n$ čine monotono neopadajući niz događaja, tada je
$$P\left(\bigcup_{j} A_j\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

neprekidnost verovatnoće

Dokaz Teoreme 3

- 1° Iz $A \subset B$ sledi $B=A+(\bar{A}B)$, pa je $P(B)=P(A)+P(\bar{A}B)$. Zbog B1° je $P(\bar{A}B) \geq 0$, pa sledi tvrđenje.
- 2° Imamo da je $A+\bar{A}=\Omega$, pa je $P(A+\bar{A})=P(\Omega)$. Na osnovu B2° i B3° sledi $P(A)+P(\bar{A})=1$, što je trebalo dokazati. Ako je $A=\Phi$, dobijamo $P(\Phi)=0$.
- 3° $A \cup B = A+(B \cap \bar{A})$ i $B = (B \cap A)+(B \cap \bar{A})$. Na osnovu B3° zaključujemo: $P(A \cup B) = P(A)+P(B \cap \bar{A})$, kao i $P(B) = P(B \cap A)+P(B \cap \bar{A})$, odakle sledi tvrđenje.
- 4° Dokazujemo indukcijom na osnovu tvrđenja 3°.
- 5° Neka je A_j, $j \in N$ monotono neopadajući niz događaja,

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_j \subseteq \ldots$$

($A_1 \subseteq A_2$ znači $A_1 \subset A_2$ ili $A_1 = A_2$)

Dokaz Teoreme 3, stav 5

- Definišimo niz događaja B_j, $j \in N$ na sledeći način:

$$B_1 = A_1$$

$$B_n = A_n \overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right)} = A_n \overline{A}_{n-1} \qquad n > 1$$

- Događaji B su međusobno disjunktni i važi:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \qquad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

stoga je:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i)$$

$$= \lim_{n \to \infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \right) = \lim_{n \to \infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

KLASIČNA DEFINICIJA VEROVATNOĆE

Klasična definicija verovatnoće

- Prethodila aksiomatskom zasnivanju teorije verovatnoće.
- Odnosi se na prostor elementarnih ishoda Ω koji je konačan skup, pri čemu su verovatnoće pojavljivanja svih elementarnih ishoda iste.

- Neka je $\Omega=\{\omega_1,\dots,\omega_n\}$. El. ishodu ω_j pridružimo broj $p_j>0$, $j=1,2,...,n$ tako da je

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$$

p_j je verovatnoća el. ishoda ω_j, $j=1,2,...,n$.

Verovatnoća u konačnoj šemi

- Događaj A koji sadrži k el. ishoda: A=$\{\omega_{j1},\ldots,\omega_{jk}\}$.
- Verovatnoću dog. A definišemo kao zbir verovatnoća el. ishoda koji pripadaju dog. A

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = p_{j1} + \ldots + p_{jk}$$

- Verovatnoća u konačnoj šemi.

Klasična definicija verovatnoće

- Ako svakom el. ishodu ω_j pridružimo istu verovatnoću

$$p_j = \frac{1}{n} \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

i ako dog. A sadrži k el. događaja, tada je njegova verov.

$$\boxed{\mathrm{P(A)} = \frac{k}{n}}$$

Klasična definicija verovatnoće

k – broj el. ishoda iz A, n je broj el. ishoda iz Ω.

- Verovatnoća događaja je količnik broja povoljnih ishoda za posamtrani događaj i broja svih mogućih ishoda u eksperimentu. Laplas (1812. god.)

Primer klasične def. verovatnoće

- Bacaju se dve kockice, jedna bela, druga plava. Odrediti verovatnoću da se dobije zbir 9.
- Povoljni: 9 = 3(b)+6(p), 4(b)+5(p), 5(b)+4(p), 6(b)+3(p)
- Mogući: 1(b)+1(p), …, 6(b)+1(p)

…

1(b)+6(p), …, 6(b)+6(p)

$6 \cdot 6 = 36 \equiv 6^2$

P(zbir 9)=4/36=1/9

Osobine verovatnoće

- Na osnovu klasične definicije verovatnoće se može dokazati da je:

(1) $P(\bar{A})=1-P(A)$

(2) $P(\Phi)=0$

(3) $P(\Omega)=1$

(4) $0\leq P(A)\leq 1$

(5) Iz $A\subset B$ sledi $P(A)\leq P(B)$

(6) Za disjunktne dog. A i B važi $P(A+B)=P(A)+P(B)$

(7) Za unije dva događaja u opštem slučaju važi
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

Iz $P(A)=k/n$, k-broj povoljnih ishoda, $0\leq k\leq 1$, sledi (4)

Primeri

- Eksperiment: bacanje novčića, beleži se strana na koju je novčić pao. Prostor el. ishoda je dvočlan, a verovatnoća svakog el. ishoda je ½.
- Eksperiment: biranje jedne karte iz špila od 52 karte. Beleži se boja eksperimenta: crvena ili crna. Prostor el. ishoda je dvočlan, a verovatnoća svakog el. ishoda je ½.
- Struktura eksperimenta.
- ***Permutacije*** sa i bez ponavljanja, ***varijacije*** sa i bez ponavljanja, ***kombinacije*** sa i bez ponavljanja.

Kombinatorika

- **KOMBINACIJE**: Iz skupa od n članova treba izračunati koliko ima podskupova veličine k ($k \leq n$)

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- **VARIJACIJE**: Iz skupa od n članova koliko različitih nizova dužine k možemo napraviti da svaki element može da se ponovi proizvoljan broj puta – *sa ponavljanjem* $n^k \quad k \in N$
- Koliko različitih nizova dužine k možemo napraviti da se svaki element javi jedan put – *bez ponavljanja* ($k \leq n$) $n(n-1)\ldots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
- **PERMUTACIJE** $n!$