STATISTISKA U METEOROLOGIJI

Prof. dr Ivana Tošić

Polaganje predmeta

- Pismeni: 3 zadatka (po 10 p)
- Usmeni: 2 pitanja (po 25 p)
- Seminar (15 p)
- Aktivnost i dolasci (5 p)

LITERATURA

- Jevremović V., 2009: *Verovatnoća i statistika*.
- Jevremović V., Mališić J., 2003: *Statističke metode u meteorologiji i inženjerstvu*.

Teorija verovatnoće

- Proučava i objašnjava zakonitosti koje nastaju pri istovremenom uticaju velikog broja slučajnih faktora.
- Osnova matematičke statistike, teorije slučajnih procesa, teorije masovnog opsluživanja, itd.
- Primena u: fizici, meteorologiji, geodeziji, astronomiji, ekonomiji, medicini, hidrologiji, biologiji, itd.

Početak teorije verovatnoće

- Odgovori na pitanja u vezi igara na sreću
- *Kardano* (Cardano, Italija, 1501-1576),
  Paskal (Pascal, Francuska, 1623-1662),
  Ferma (Fermat, Francuska, 1601-1665).
- *Bernuli* (Bernoulli, Švajcarska, 1654-1705).
  Bernulijev zakon velikih brojeva.
- *Muavr* (Moivre, Engleska, 1667-1754), *Laplas* (Laplace, Francuska, 1749-1827), *Gaus* (Gauss, Nemačka, 1777-1855), *Puason* (Poisson, Francuska, 1781-1840),
  Čebišev (Rusija, 1821-1894),
  Markov (Rusija, 1856-1922).
- *Kolmogorov* (Rusija, 1903-1987) Aksiomatsko zasnivanje teorije verovatnoće.

Slučajni događaji

- Srećemo se sa pojavama koje se mogu ostvariti ili ne pri realizaciji nekog kompleksa uslova
- Eksperiment je jedna realizacija posmatranog kompleksa uslova.
- **Stohastički eksperimenti** – pre izvođenja eksp. se tačno zna šta se posmatra kao ishod eksp. i poznat je skup mogućih ishoda, ali pre izvođenja eksp. ishod nije poznat.
- **Deterministički eksperimenti** – ishod svakog eksp. je poznat pre izvođenja.
- Primer bacanja numerisane kocke.

Elementarni ishodi

- **Elementaran ishod** ili **elementaran događaj** u teoriji verovatnoće se ne definiše – primaran pojam.
- **Prostor elementarnih ishoda** – skup svih elementarnih ishoda jednog eksperimenta. Obeležavamo ga sa Ω, a njegove elemente sa ω.

$$\Omega = \{ \omega / \omega \in \Omega \}$$

- ω – slučajan ishod, pojedinačan rezultat

Primer: Prostori elementarnih ishoda

Eksperiment je bacanje dve kockice, bele i plave

- Ako beležimo brojeve na gornjoj strani kocke, prostor el. ishoda

$$\Omega_1 = \{(1,1), (1,2), \ldots, (6,6)\}$$

- Ako beležimo zbir dobijenih brojeva, prostor el. ishoda

$$\Omega_2 = \{2, 3, \ldots, 12\}$$

- Ako beležimo redni broj bacanja u kome su se prvi put pojavile dve petice, prostor el. ishoda je skup prirodnih brojeva

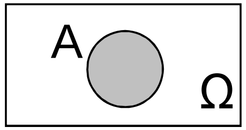
$$\Omega_3 = N$$

- Ako beležimo ugao između stranica na kojima je npr. broj jedan

$$\Omega_4 = [0, \pi)$$

- PEI može imati konačno mnogo elemenata, prebrojivo i neprebrojivo mnogo el. ishoda.

Definicija1. **Podskup *A* skupa Ω je slučajan događaj**



- Događaj A se **ostvario** (**realizovao**) ako je A slučajan događaj i ako je rezultat eksperimenta jedan od elementarnih ishoda koji pripadaju skupu A.
- Svaki elementarni ishod je slučajan događaj i tada je skup A jednočlan.
- Skup el. ishoda Ω je sl. događaj i naziva se **siguran** (**pouzdan**, **izvestan**) događaj, a prazan skup Ø je sl. događaj koji se naziva **nemoguć** događaj.
- Slučajni događaj – događaj. Označavamo ih velikim slovima: A, B, C ili sa indeksima A_1, A_2, A_3
- A={2, 4, 6}

Primer 1: slučajni događaji

- Događaj $\mathrm{A} = \{(k, j) / k \in \{1,3,5\}, j = 6\}$

  Ako je rezultat jednog eksp. (3,6), kažemo da se realizovao događaj A, jer se desio jedan od elem. ishoda koji pripadaju događaju A. $\mathrm{A} = \{(1,6),(3,6),(5,6)\}$
- Događaj $\mathrm{B} = \{(k, j) / k > j\}$

  Ako je rezultat jednog eksp. (4,1), kažemo da se realizovao događaj B.
- Događaj $\mathrm{C} = \{(1, j) / j \geq 7\}$

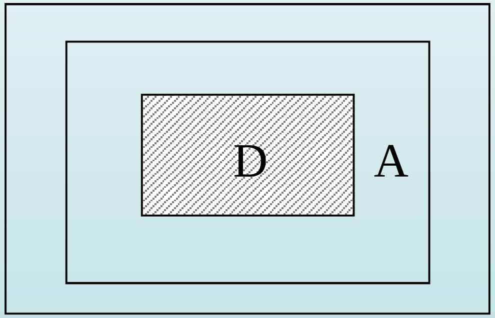
  Nemoguć događaj.
- Događaj $\mathrm{D} = \{(5,6)\}$
  - Jednočlan podskup posmatranog prostora Ω_1

Relacije u skupu događaja

- Relacijama opisujemo međusobne odnose događaja.
- **Definicija 2. Ako svako ostvarivanje događaja A povlači (implicira) ostvarivanje događaja B, tada događaj A povlači (implicira) događaj B.**
  - A i B su u **relaciji inkluzije**.
  - Svaki el. ishod koji pripada A je i el. ishod koji pripada B. Za ovu relaciju koristimo oznaku iz teorije skupova

$$A \subset B$$

  - U primeru 1 za događaje A i D važi: $D \subset A$



Def. 3. **Ako je A $\subset$ B i B $\subset$ A, tada su događaji A i B jednaki**

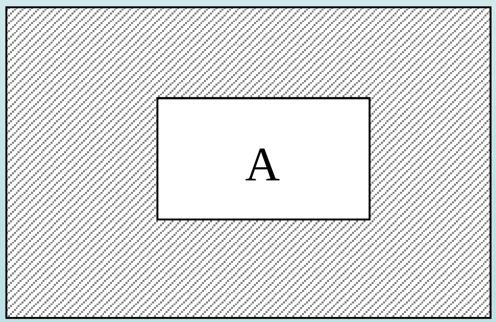
- A i B su u relaciji jednakosti (ekvivalencije).
- Svaki el. ishod koji pripada događaju A, pripada događaju B i obrnuto. A=B
  - U primeru 1 posmatrajmo događaj A i događaj $\mathrm{E}=\{(i,j)/i=6-k, k=1,3,5, j=6\}$

    A=E

  - Ako su dva dog. A i B iz istog prostora el. ishoda, u relaciji inkluzije, ali nisu jednaki, pišemo A$\subset$B.
  - A$\subseteq$B označava A$\subset$B ili A=B.

Operacije u skupu događaja

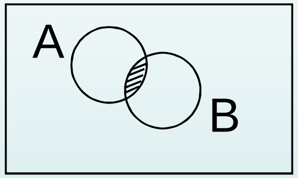
- Definišemo operacije kojima se po određenim pravilima od zadatih (poznatih) događaja formiraju novi.
- **Definicija 4. Događaj Ā koji se realizuje ako i samo ako se događaj A ne realizuje je komplement događaja A.**
- Događaj Ā je suprotan događaju A, tj. komplementaran, A^c.
  - Primer 1: kompl. dog. B je $\overline{\mathrm{B}} = \{(k, j) / k \leq j\}$



Presek događaja

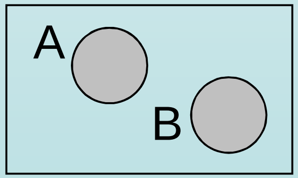
- **Definicija 5. Ako se događaj C realizuje ukoliko se realizuju i dog. A i dog. B, tada je C presek događaja A i B.**

$$\mathrm{C} = \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \qquad \mathrm{C} = \mathrm{AB}$$



$$\mathrm{D} = \mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{A}_n = \bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{A}_j$$

-Primer 1: događaji A i B su **disjunktni događaji**: AB=Ø
Ne mogu se ostvariti istovremeno.



Unija događaja A i B

- **Definicija 6. Ako se dog. F realizuje ukoliko se realizuje bar jedan od dog. A i B, tada je dog. F unija dog. A i B.**
- Dog. F pripadaju el. ishodi koji pripadaju dog. A ili dog. B

$$\mathrm{F} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$$

- Ukoliko su dog. A i B disjunktni, tada pišemo A+B.
- Unija D je događaj koji se ostvaruje ako se ostvari bar jedan od događaja iz niza

$$\mathrm{D} = \mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_n = \bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{A}_j$$

Primer 1. $\mathrm{A} \cup \mathrm{D} = \mathrm{A}$ $\quad \mathrm{A} \cup \overline{\mathrm{A}} = \Omega$

Za svaki događaj

- Za svaki događaj važi:

$$X \subseteq \Omega \qquad X \cup \overline{X} = \Omega$$

$$X \subseteq \Omega \qquad X \cap \overline{X} = \emptyset$$

Primer 2.

- Dati su događaji $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Korišćenjem operacija unija, presek i komplement zapisati događaje:
  - D – realizovao se bar jedan od dog. $A_1, A_2, \ldots, A_n$
  - E – bar jedan od događaja se nije realizovao
  - F – realizovao se tačno jedan od događaja $A_1, A_2, \ldots, A_n$

  Rešenje:

$$D = \bigcup_j A_j \qquad E = \bigcup_j \overline{A}_j \qquad E = \overline{\bigcap_j A_j}$$

Događaj koji označava da se od posmatranih događaja realizovao jedino dog. A_1 pišemo kao $A_1 \overline{A_2} \ldots \overline{A_n}$

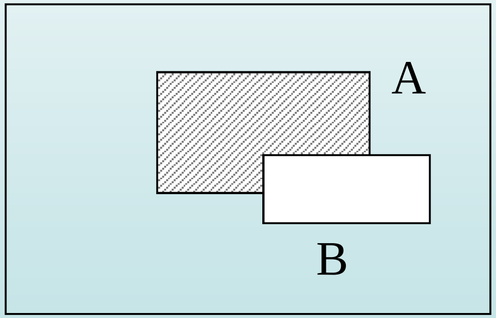
$$F = (A_1 \overline{A_2} \ldots \overline{A_n}) \cup (\overline{A_1} A_2 \ldots \overline{A_n}) \cup \ldots \cup (\overline{A_1} A_2 \ldots \overline{A_{n-1}} A_n)$$

$$F = \bigcup_{i=1}^{n} \left(A_i \bigcap_{j \neq i} \overline{A}_j \right)$$

Razlika dog. A i B

- **Definicija 7. Ako se događaj G realizuje ukoliko se realizuje dog. A i ne realizuje dog. B, tada je dog. G razlika dog. A i B.**

- Razlika dog. A i B je A\B ili $A \cap \overline{B}$



Potpun sistem događaja

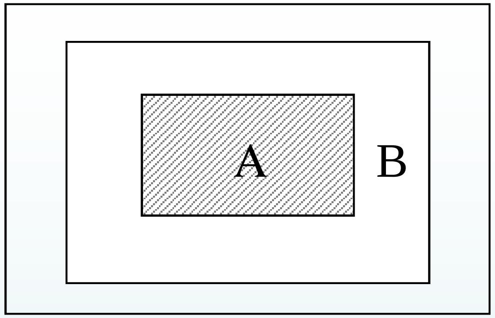
- **Definicija 8. Ako su dog. A_1, A_2,…, A_n međusobno disjunktni u parovima i ako je njihova unija siguran događaj, tada dog. A_1, A_2,…, A_n čine potpun sistem događaja.**

$$A_i \cap A_j = \varnothing \qquad i \neq j \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

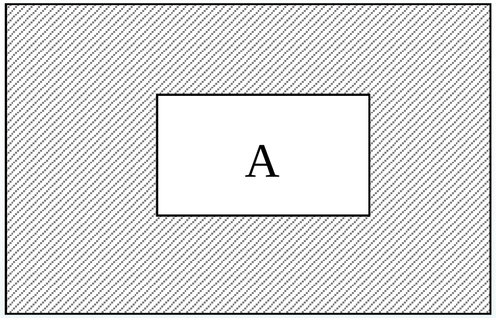
$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \Omega$$

- **Ako dog. A_1, A_2,…, A_n čine potpun sistem događaja, kažemo da oni čine jedno *razlaganje* (*razbijanje*) Ω.**
- **Primer: Jednostruko bacanje kocke: sistem dog. koji odgovaraju pojavi 1, 2, 3, 4, 5, 6 tačaka.**

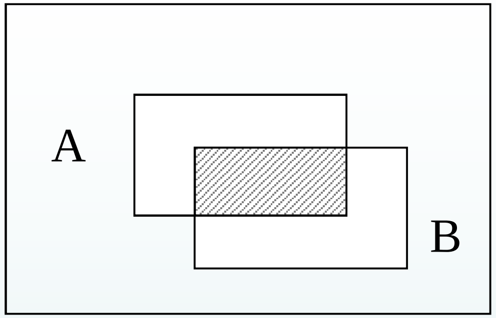
Venovi dijagrami



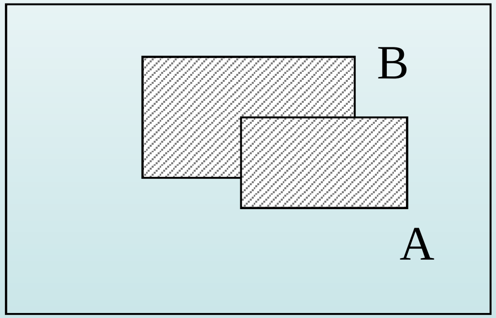
$A \subset B$



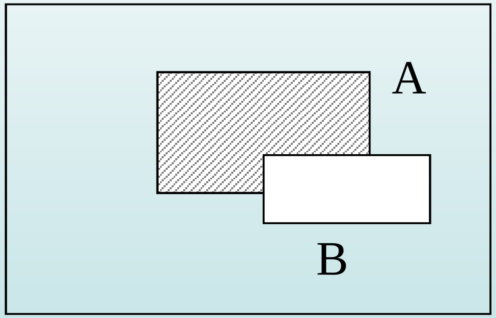
$\overline{A}$



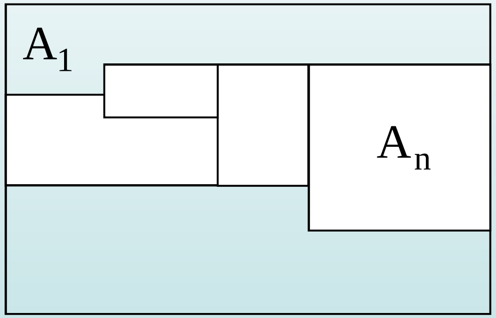
$A \cap B$



$A \cup B$



$A \setminus B$



$A_1, A_2, \ldots, A_n$

Teorema 1.

- Za slučajne dog. A, B i C iz istog prostora elementarnih ishoda važi:

$$AB \subseteq A \subseteq A \cup B$$

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$A \subseteq B$ sledi $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

komutativnost

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

distributivnost

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

asocijativnost

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

De Morganovi obrasci