Testiranje parametarskih hipoteza

- Pretpostavka (hipoteza) o parametru raspodele se zove **parametarska hipoteza**.
- Postupak njenog potvrđivanja ili odbacivanja na osnovu podataka iz uzorka je **parametarski test**.
- Ako hipoteza u potpunosti određuje raspodelu obeležja kaže se da je to **prosta** hipoteza. Hipoteza da je nepoznati parametar θ jednak broju θ_0, u oznaci $H_0(\theta = \theta_0)$, je primer proste hipoteze.
- Ako hipoteza nije prosta, onda je **složena**.

Prag značajnosti ili nivo značajnosti

- Obično imamo dve hipoteze: hipoteza koju testiramo H_0 - **nulta hipoteza** i hipoteza H_1 – **alternativna hipoteza**.
- Ako se odbacuje nulta hipoteza kada je tačna, pravi se **greška prvog tipa**.
- Ako se prihvata nulta hipoteza kada je tačna alternativna hipoteza, pravi se **greška drugog tipa**.
- Verovatnoća α odbacivanja hipoteze H_0, ako je tačna, je verovatnoća greške prvog tipa i naziva se **prag značajnosti** ili **nivo značajnosti**. Obično se uzima da je 0,01; 0,05 ili 0,1.

Opšte napomene

- Neka je $X_1, ..., X_n$ prost slučajan uzorak obima n za obeležje X u čijoj raspodeli figuriše nepoznati parametar θ.
- Testiramo hipotezu $H_0(\theta = \theta_0)$ protiv alternative $H_1(\theta \neq \theta_0)$.
- Formira se statistika kojom se ocenjuje parametar θ.
- Izračuna se realizovana vrednost statistike θ_n^*
- Pomoću odgovarajućih tablica se nalazi ε iz uslova

statistika

$$P_{H_0}[|\hat{\theta}_n - \theta_0| \geq \varepsilon] = \alpha$$

H_0 se odbacuje na osnovu datog uzorka i za dato α ako je

$$|\theta_n^* - \theta_0| \geq \varepsilon$$

realizovana vrednost statistike

Opšte napomene, nastavak

- Druga mogućnost je da se pri pretpostavci H_0 izračuna

$$P_{H_0}[|\hat{\theta}_n - \theta_0| \geq |\theta_n^* - \theta_0|] = \alpha^*$$

H_0 se odbacuje ako je $\alpha^* \leq \alpha$.

Skup K=(-∞, θ_0 - ε] ∪ (θ_0 + ε, ∞] je **kritična oblast** za H_0 pri H_1.

$$P_{H_0}[\hat{\theta}_n \in K] = \alpha$$

H_1 ($\theta \neq \theta_0$).

Kritična oblast je jednostrana K=(θ_0 + ε, ∞] ako je H_1 ($\theta > \theta_0$).

Kritična oblast je jednostrana K=(-∞, θ_0 - ε,] ako je H_1 ($\theta < \theta_0$).

Verovatnoće odluka

- Postupak donošenja odluke i verovatnoće pojedinih odluka pri testiranju hipoteze H_0 protiv alternativne H_1

Hipoteza koja je prihvaćena $\Rightarrow$ Hipoteza koja je tačna $\Downarrow$	H_0	H_1
H_0	Pravilna odluka (1-α)	Greška 1. vrste (α)
H_1	Greška 2. vrste (β)	Pravilna odluka (1-β)

- Veličina (1-β) predstavlja verovatnoću da se ne učini greška druge vrste – **moć testa**.

Hipoteze o matematičkom očekivanju

Testiranje hipoteze $H_0(m=m_0)$ o matematičkom očekivanju obeležja X koje ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, ako je σ^2 poznato.

- Neka je alternativna hipoteza $H_1(m \neq m_0)$.
- Ako je H_0 tačna, uzoračka sredina ima $\mathcal{N}(m, \sigma^2/n)$ raspod.

ε nalazimo iz uslova

$$P_{H_0}\left[\left|\overline{X}_n - m_0\right| \geq \varepsilon\right] = P_{H_0}\left[\left|\frac{\overline{X}_n - m_0}{\sigma}\sqrt{n}\right| \geq \frac{\varepsilon}{\sigma}\sqrt{n}\right] = \alpha$$

Za dato α pomoću tablica se nalazi z_β i izračuna ε

$$z_\beta = \frac{\varepsilon}{\sigma}\sqrt{n}$$

Hipoteze o matematičkom očekivanju

- Nultu hipotezu odbacujemo ako je

$$\left|\bar{x}_n - m_0\right| \geq \varepsilon$$

- Oblast $K=(-\infty, m_0 - \varepsilon] \cup (m_0 + \varepsilon, \infty]$ je **kritična oblast** za hipotezu $H_0(m = m_0)$ pri alternativi $H_1(m \neq m_0)$.

- Ako realizovana vrednost statistike $\bar{x}_n \in K$, onda hipotezu H_0 odbacujemo.

interval poverenja  β verovatnoća da parametar bude u intervalu $\to 1$

kritična oblast  α verovatnoća da parametar bude u krit. oblasti $\to 0$

Hipoteze o matematičkom očekivanju

Testiranje hipoteze $H_0(m=m_0)$ o matematičkom očekivanju obeležja X koje ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, ako disperzija σ^2 **nije poznata**.

- Neka je alternativna hipoteza $H_1(m \neq m_0)$.
- Ako je H_0 tačna, onda statistika:

$$\frac{\bar{X}_n - m_0}{\bar{S}_n}\sqrt{n-1}$$

ima Studentovu raspodelu sa n-1 stepeni slobode. Iz tablica za Studentovu raspodelu nalazi se ε iz

$$P_{H_0}\left[\left|\bar{X}_n - m_0\right| \geq \varepsilon\right] = P_{H_0}\left[\left|\frac{\bar{X}_n - m_0}{\bar{S}_n}\sqrt{n-1}\right| \geq \frac{\varepsilon}{\bar{S}_n}\sqrt{n-1}\right] = \alpha$$

H_0 se odbacuje ako je ε manje ili jednako od realizovane vrednosti $\left|\bar{x}_n - m_0\right|$ iz uzorka.

Hipoteze o disperziji

Testiranje hipoteze $H_0(\sigma^2 = \sigma^2{}_0)$ ako obeležje ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ i ako je m **poznato**.

- Neka je alternativna hipoteza $H_1(\sigma^2 > \sigma^2{}_0)$.
- Pri tačnoj hipotezi H_0 statistika $\dfrac{n\widetilde{S}_n^2}{\sigma_0^2}$ ima χ_n^2

Kritičnu oblast nalazimo iz

$$P_{H_0}\left[\frac{n\widetilde{S}_n^2}{\sigma_0^2} > \varepsilon\right] = \alpha$$

Iz tablica za χ^2 raspodelu se nalazi vrednost ε. Ako je

$$\frac{n\widetilde{s}_n^2}{\sigma_0^2} > \varepsilon$$

H_0 se odbacuje na osnovu datog uzorka za dato α.

Hipoteze o disperziji, nastavak

Testiranje hipoteze $H_0(\sigma^2 = \sigma^2{}_0)$ ako obeležje ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ i ako m **nije poznato**.

- Neka je alternativna hipoteza $H_1(\sigma^2 > \sigma^2{}_0)$.
- Pri tačnoj hipotezi H_0 statistika $\dfrac{n\bar{S}_n^2}{\sigma_0^2}$ ima χ^2_{n-1}
- Kritičnu oblast nalazimo iz

$$P_{H_0}\left[\frac{n\bar{S}_n^2}{\sigma_0^2} > \varepsilon\right] = \alpha$$

Za dato α iz tablica za χ^2 raspodelu sa n-1 stepeni slobode se nalazi vrednost ε. Ako je $\dfrac{n\bar{s}_n^2}{\sigma_0^2} > \varepsilon$

H_0 se odbacuje na osnovu datog uzorka i za dato α.

Testiranje hipoteze o jednakosti disperzija

Testiranje hipoteze $H_0(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$ za nezavisna obeležja sa normalnim raspodelama i **poznatim očekivanjima**.

- Neka nezavisna obeležja imaju normalne raspodele

$$X : N(m_1, \sigma_1^2) \qquad Y : N(m_2, \sigma_2^2)$$

- Neka je alternativna hipoteza $H_1\ (\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2)$.

- Ako je H_0 tačna, tada statistika

$$Z = \frac{\dfrac{\tilde{S}_{n_1}^2}{\sigma_1^2}}{\dfrac{\tilde{S}_{n_2}^2}{\sigma_2^2}} = \frac{\tilde{S}_{n_1}^2}{\tilde{S}_{n_2}^2}$$

ima Fišerovu raspodelu $F_{n1,n2}$.

Hipoteza o jednakosti disperzija

- Iz uslova

$$P[Z \in (0,1-\varepsilon_1) \cup (1+\varepsilon_2,\infty)] = \alpha$$

ne mogu se jednoznačno odrediti ε_1 i ε_2. Postavljaju se dodatni uslovi

$$P(Z < 1-\varepsilon_1) = \frac{\alpha}{2} \qquad P(Z > 1+\varepsilon_2) = \frac{\alpha}{2}$$

ε_1 i ε_2 se određuju iz tablica za $F_{n1,n2}$ raspodelu.

Testiranje hipoteze o jednakosti disperzija

Testiranje hipoteze $H_0(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$ za nezavisna obeležja sa normalnim raspodelama i **nepoznatim očekivanjima**.

- Neka nezavisna obeležja imaju normalne raspodele

$$X : N(m_1, \sigma_1^2) \qquad Y : N(m_2, \sigma_2^2)$$

- Neka je alternativna hipoteza $H_1\ (\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2)$.
- Ako je H_0 tačna, tada statistika

$$Z = \frac{\hat{S}_{n_1}^2}{\hat{S}_{n_2}^2}$$

ima Fišerovu raspodelu F_{n_1-1, n_2-1}.

Hipoteza o jednakosti disperzija

- Iz uslova

$$P[Z \in (0,1-\varepsilon_1) \cup (1+\varepsilon_2,\infty)] = \alpha$$

ne mogu se jednoznačno odrediti ε_1 i ε_2. Postavljaju se dodatni uslovi

$$P(Z < 1-\varepsilon_1) = \frac{\alpha}{2} \qquad P(Z > 1+\varepsilon_2) = \frac{\alpha}{2}$$

ε_1 i ε_2 se određuju iz tablica za $F_{n_{1-1},n_{2-1}}$ raspodelu. Ako je realizovana vrednost statistike Z u kritičnoj oblasti $(0, 1-\varepsilon_1)\cup(1+\varepsilon_2, \infty)$ hipotezu H_0 odbacujemo za date uzorke i dati prag značajnosti.

Neparametarski testovi

- Hipoteze o raspodeli obeležja (koje se odnose na samu raspodelu obeležja) se nazivaju **neparametarske hipoteze**, a odgovarajući testovi **neparametarski testovi (testovi saglasnosti)**.
- **Pirsonov χ^2 - test**
- Testira se hipoteza H_0 da obeležje X za koje imamo prost slučajan uzorak $X_1, ..., X_n$ ima datu funkciju raspodele $F_0(x)$. Pišemo: $H_0\ (X : F_0(x))$
- Neka je u raspodeli obeležja X nepoznato s parametara.
- Skup mogućih vrednosti obeležja se razbija na r disjunktnih delova $S_1, ..., S_r$, tako da je broj m_j elemenata iz uzorka u skupu S_j najmanje 5.

Pirsonov χ^2 - test

- Brojevi m_j su realizovane vrednosti slučajnih veličina M_j, čije su raspodele $\mathcal{B}(n, p_j)$, $j=1,\ldots,r$.
- Nalaze se verovatnoće $p_j = P_{H_0}[X \in S_j]$
- Statistika kojom se testira postavljena hipoteza je

$$\chi_U^2 = \sum_{j=1}^{r} \frac{(M_j - n \cdot p_j)^2}{n \cdot p_j} = \sum_{j=1}^{r} \frac{M_j^2}{n \cdot p_j} - n$$

- Ako je H_0 tačna, test-statistika ima raspodelu

$$\chi^2_{r-s-1}$$

χ^2 - test

- Za dati nivo značajnosti, iz uslova

$$P(\chi^2_{r-s-1} \geq \chi^2_{r-s-1;\alpha}) = \alpha$$

se određuje $\chi^2_{r-s-1;\alpha}$.

- **Ako je vrednost test-statistike veća od tablične, hipoteza se odbacuje**. U suprotnom, hipoteza se prihvata.

- Ovaj test se naziva **hi-kvadrat** ili **Pirsonov test**.

Test Kolmogorova

- Neparametarski test (nezavisan od raspodele obeležja).
- Primenjuje se za obeležja koja imaju neprekidne raspodele.
- Nulta hipoteza H_0 je da je raspodela $F(x)$ jednaka raspodeli $F_0(x)$, a alternativna hipoteza je da je $F(x)$ različita od $F_0(x)$.
- Test-statistika, tj. statistika Kolmogorova je

uzoračka funkcija raspodele

$$D_n = \sup_{-\infty<x<\infty} \left| F_n^*(x) - F_0(x) \right|$$

  - Kolmogorov je pokazao da za neprekidne funkcije raspodela važi

$$\lim_{n\to\infty} P[\sqrt{n} D_n < \lambda] = K(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \mathrm{e}^{-2k^2\lambda^2}, \quad \lambda > 0$$

$$K(\lambda) = 0, \quad \lambda \le 0$$

Test Kolmogorova, nastavak

- Neka je realizovana vrednost statistike Kolmogorova

$$d_n = \sup_{-\infty<x<\infty} \left|F_n^*(x) - F_0(x)\right|$$

- Kritična oblast je

$$C = [d_{n,\alpha}, \infty)$$

određuje se iz tablica

- Hipotezu H_0 odbacujemo (za dati prag značajnosti i za dati uzorak), ako je

$$d_n > d_{n,\alpha}$$

Poređenje neparametarskih testova

- χ^2 – test se odnosi na sve raspodele. Test Kolmogorova samo za neprekidne raspodele.
- U χ^2 – testu mogu figurisati i raspodele sa nepoznatim parametrima.
- Kod χ^2 – testa se upoređuju empirijske i teorijske frekvencije, a kod testa Kolmogorova empirijska i teorijska funkcija raspodele.
- U χ^2 – testu se vrši grupisanje podataka i samo je važno koliko ih ima po pojedinim intervalima, a ne i koji su. Time se gubi deo informacije o uzorku.