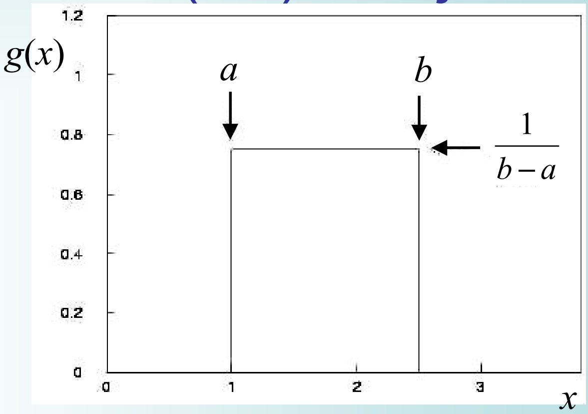
Uniformna raspodela

- Sp X ima uniformnu raspodelu na intervalu (a,b) ako je gustina sp X

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & x\notin[a,b]\end{cases}$$



- Oznaka uniformne raspodele je $X:\mathcal{U}(a, b)$
- Matematičko očekivanje i disperzija su:

$$E(X)=\frac{a+b}{2}$$

- Koeficijent asimetrije je nula.
- Koeficijent spljoštenosti je f_2=-1,2.

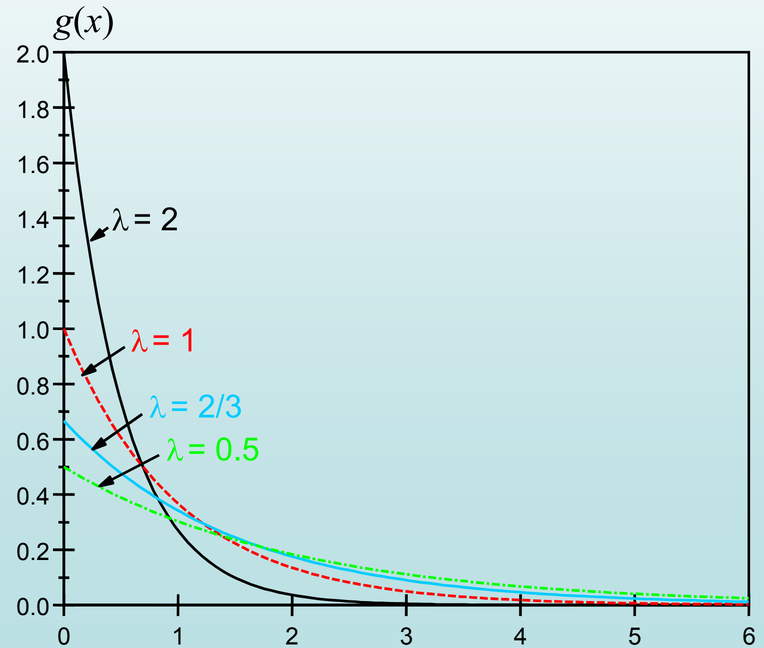
$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

Eksponencijalna raspodela

- Slučajna promenljiva X ima **eksponencijalnu raspodelu** sa parametrom λ, $\lambda>0$ ako je gustina raspodele sp X oblika

$$\boxed{g(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}}$$

Označavamo sa X: $\varepsilon(\lambda)$



Eksponencijalna raspodela, disperzija

- Slučajna promenljiva X ima **eksponencijalnu raspodelu** $X:\varepsilon(\lambda)$. Matematičko očekivanje je

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

- Disperzija je

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

- Koeficijent varijacije je 1, koeficijent asimetrije je 2, a koeficijent spljoštenosti je 6.

Eksponencijalna raspodela, nastavak

- Sp X ima osobinu koja se naziva **odsustvo memorije**. Za svaka dva pozitivna broja t i s važi:

$$P[X > t+s \,/X> t]=P[X > s]$$

- Ako sp X ima $\mathcal{U}(0,1)$ raspodelu, tada Y=-ln$X$ i Z=-ln(1-X) imaju eksponencijalnu $\varepsilon(1)$ raspodelu.
- Ako X:$\varepsilon(\lambda)$ i $Y=X+c$, tada je gustina za Y :

$$\boxed{g(u)=\begin{cases} 0, & u \le c \\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda(u-c)}, & u > c \end{cases}}$$

- Ovakva raspodela je **dvoparametarska eksponencijalna raspodela**, u oznaci $\varepsilon(\lambda, c)$.

Dvostrana eksponencijalna raspodela

- Raspodela slučajne promenljive sa gustinom

$$\boxed{g(x)=\frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\lambda|x|}} \qquad x\in R$$

je **dvostrana eksponencijalna** ili **Laplasova** raspodela.

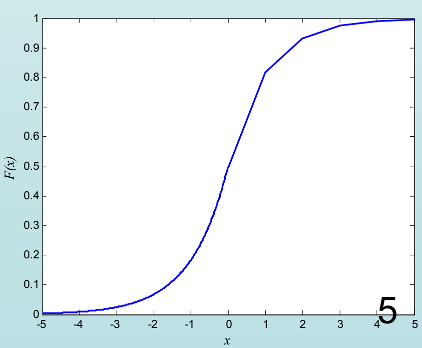
- Primer. Odrediti konstantu k tako da data funkcija $g(x)$ bude gustina raspodele sp X, a zatim odrediti funkciju raspodele, matematičko očekivanje i disperziju sp X.

$$g(x)=k\mathrm{e}^{-|x|} \qquad x\in R$$

$$k=\frac{1}{2}$$

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}, & x\le 0\\ 1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}, & x>0\end{cases}$$

$$E(X)=0 \qquad D(X)=2$$



χ^2- raspodela

- Neka su sp $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne i sve imaju $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelu. Za sp

$$X = X_1^2 + \ldots + X_n^2$$

kažemo da ima χ^2 **(hi kvadrat) raspodelu sa n stepeni slobode**, što označavamo

$$X : \chi_n^2$$

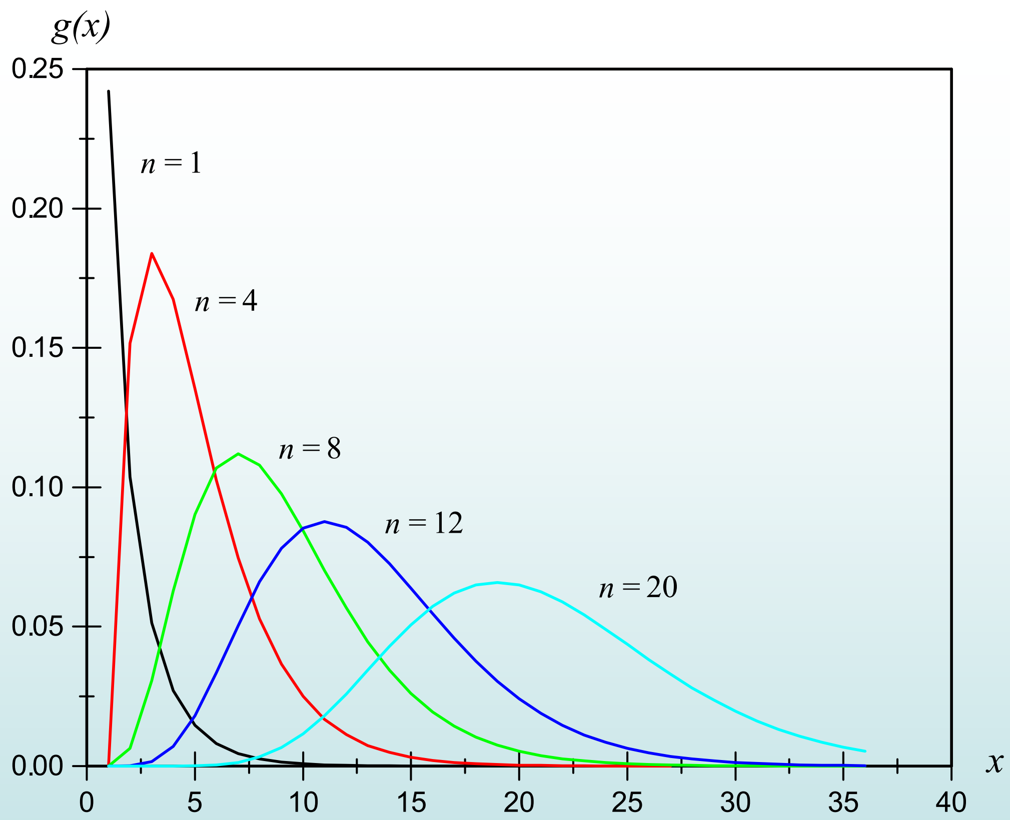
- Matematičko očekivanje je

$$E(X) = n$$

- Disperzija je

$$D(X) = 2n$$

χ^2- raspodela za različite vrednosti n



- Sa povećanjem broja stepeni slobode, n, tačka lokalnog ekstremuma, tzv. **mod raspodele** se pomera udesno.

Aproksimacije hi-kvadrat raspodele

- Za $n \geq 30$ hi-kvadrat raspodela se može aproksimirati normalnom raspodelom $\mathcal{N}(n, 2n)$, a raspodela sp

$$\frac{\chi_n^2 - n}{\sqrt{2n}}$$

normalnom normiranom raspodelom.

- Može se koristiti i **Fišerova aproksimacija** po kojoj $\sqrt{2\chi_n^2}$ ima približno normalnu raspodelu $\mathcal{N}(\sqrt{2n-1}, 1)$

Tablice za χ^2- raspodelu

- Tablice za hi-kvadrat raspodelu daju vrednosti χ^2_α za koje je verovatnoća

$$P(X > \chi^2_\alpha) = \alpha$$

gde je α zadato i jednako 0,99, 0,95, ..., 0,01, a sp X ima hi-kvadrat raspodelu sa n stepeni slobode.

n	α=0,99	...	α=0,01
1	0,000	...	6,635
2	0,020	...	9,210
...	...	...	...
17	6,408	...	**33,409**
...	...	...	...
30	14,953	...	50,892

Za sp X sa χ^2_{17}

$$P(X > 33{,}409) = 0{,}01$$

gde je α**-prag značajnosti**

Gustina raspodele sp X: χ^2

- Gustina raspodele sp $X:\chi^2_n$

$$\boxed{g(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}x^{n/2-1}\mathrm{e}^{-x/2}, & x>0\end{cases}}$$

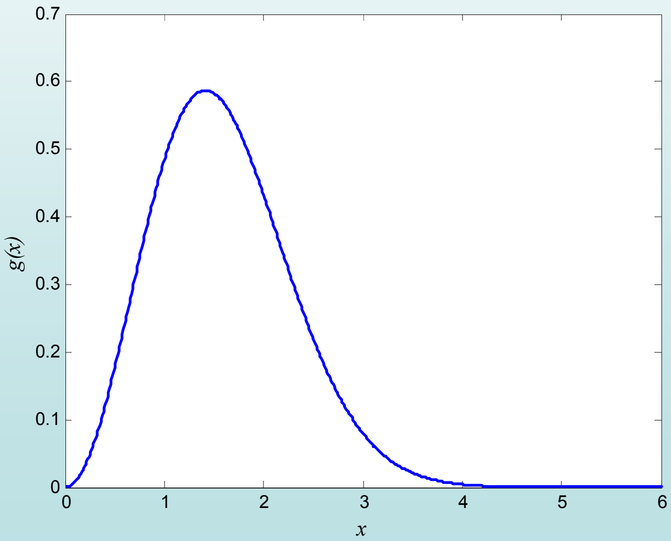
$$\Gamma(z)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t \qquad z\in R^+ \qquad\qquad \Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$$

Gama funkcija

- U specijalnom slučaju kada je $z=n\in N$ biće $\Gamma(n)=(n-1)!$

χ^2 - raspodela, nastavak

- Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive, $X:\chi^2_n$, $Y:\chi^2_m$ tada je $Z=X+Y$ slučajna promenljiva sa χ^2_{n+m}.
- Raspodela sp $X = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$ predstavlja kvadrat brzine čestica. Brzina $V = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}$ ima gustinu



$$g(v) = \begin{cases} 0, & v \le 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} v^2 e^{-\frac{v^2}{2}}, & v > 0 \end{cases}$$

Maksvelova raspodela

Studentova raspodela

- Ako su sp $Y:\mathcal{N}(0, 1)$ i sp $Z:\chi_n^2$ nezavisne, tada sp

$$X = \frac{Y}{\sqrt{\frac{Z}{n}}}$$

  ima **Studentovu raspodelu sa n stepeni slobode**, u oznaci: $X: t_n$

- Ako su sp $Y, X_1, ..., X_n$ nezavisne i sve imaju normalnu normiranu raspodelu $\mathcal{N}(0, 1)$, tada sp

$$X = \frac{Y\sqrt{n}}{\sqrt{X_1^2 + ... + X_n^2}}$$

  ima studentovu t_n raspodelu.

Studentova raspodela, disperzija

- Ako X: t_n, onda je matematičko očekivanje

$$E(X) = 0$$

- Disperzija je

$$D(X) = \begin{cases} \infty, & n \leq 2 \\ \dfrac{n}{n-2}, & n > 2 \end{cases}$$

Tablice za Studentovu raspodelu

- Tablice za Studentovu-t raspodelu daju vrednosti t_α za koje je verovatnoća

$$P(|X| > t_\alpha) = \alpha$$

gde je α zadato i jednako 0,99, 0,95, ..., 0,01, a sp X ima t-raspodelu sa n stepeni slobode.

n	α=0,9	...	α=0,01
1	0,158	...	63,657
2	0,142	...	9,925
...	...	...	...
17	0,128	...	**2,898**
...	...	...	...
30	0,127	...	2,750

Za sp X sa t_{17} raspod.

$$P(|X| > 2{,}898) = 0{,}01$$

gde je α-**prag značajnosti**

Gustina Studentove raspodele

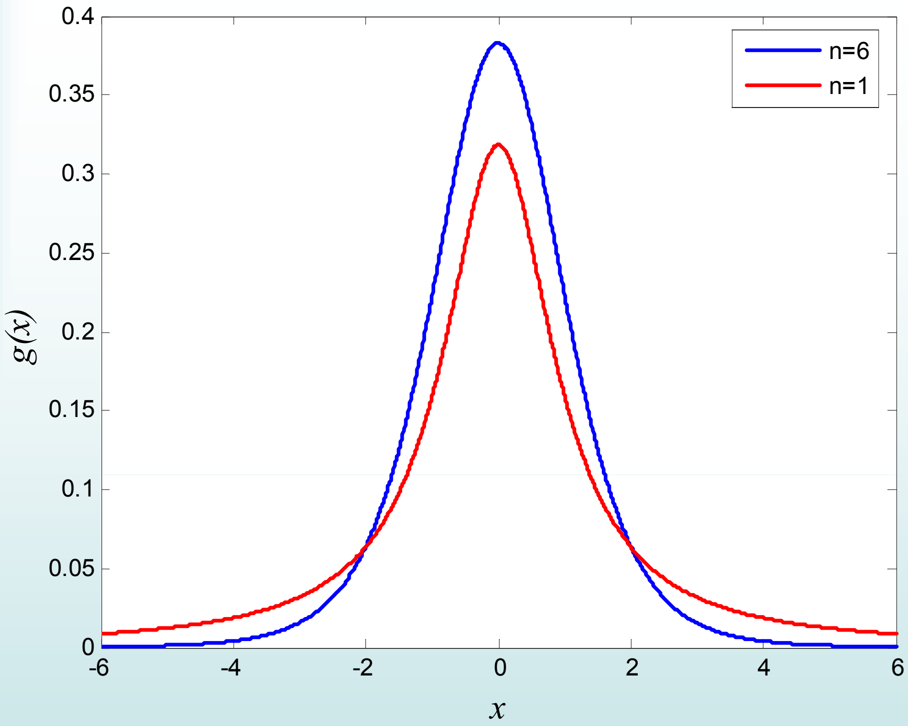
- Gustina raspodele sp X: t_n je:

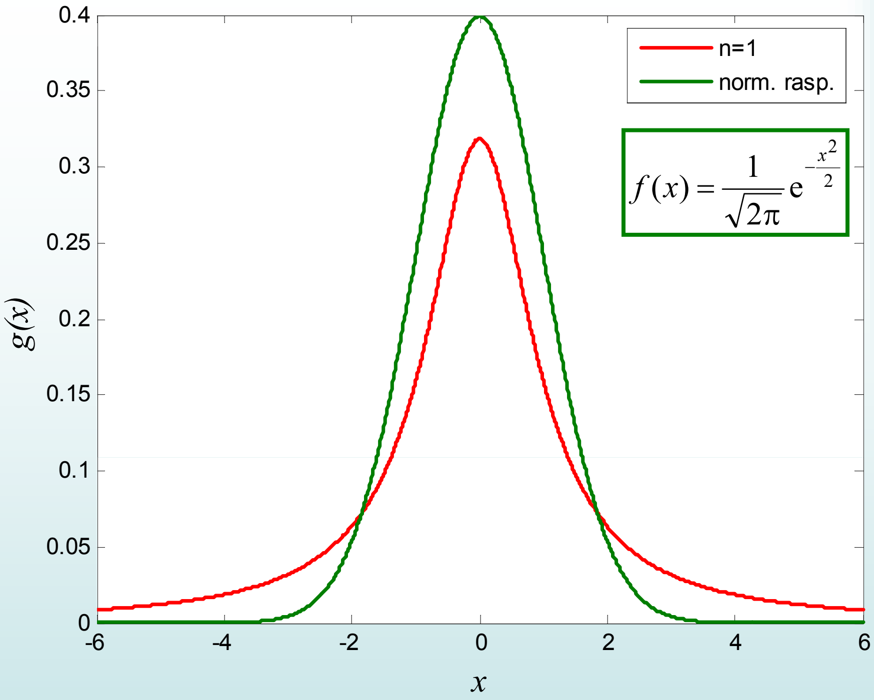
$$\boxed{g(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},\ x\in R}$$

gde je $\Gamma(z)$ gama funkcija, a n pozitivan broj – ali je zbog primena u statistici prirodan broj.

- Ukoliko je $n\geq 30$, t_n raspodela se može aproksimirati $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelom. Zato u tablicama ne figurišu vrednosti veće n od 30.

Studentova raspodela za $n=6$ i $n=1$





- Normalna raspodela brže konvergira ka 0, nego Studentova raspodela kada $x \to -\infty$ ili $x \to \infty$ i $g(0) < f(0)\ \forall n \in N$

Fišerova raspodela

- Ako su sp $Y:\chi_n^2$ i $Z:\chi_k^2$ nezavisne, tada sp

$$X = \frac{\frac{Y}{n}}{\frac{Z}{k}}$$

  ima **Fišerovu raspodelu sa *n* i *k* stepeni slobode** u oznaci: $X:\mathcal{F}_{n,k}$

- Ako $X:\mathcal{F}_{n,k}$ tada $Y=1/X$ ima raspodelu $\mathcal{F}_{k,n}$, pa se u tablicama daju parovi vrednosti n i k za koje je $n>k$.

Fišerova raspodela, disperzija

- Ako $X:\mathcal{F}_{n,k}$ tada je matematičko očekivanje

$$E(X)=\frac{k}{k-2}$$

$E(X)\to 1,\ k\to\infty$

- Disperzija je

$$D(X)=\frac{2k^2(n+k-2)}{n(k-2)^2(k-4)}$$

- Kada $k\to\infty$, tada se $\mathcal{F}_{n,k}$ može aproksimirati raspodelom sp Y/n, gde je $Y:\chi^2_n$.
  Označimo to sa $\mathcal{F}_{n,\infty}\approx\frac{1}{n}\chi^2_n$. Odatle sledi $\mathcal{F}_{\infty,\,k}=\frac{1}{F_{k,\infty}}\approx\frac{k}{\chi^2_k}$

Gama raspodela

- Ako je gustina sp X

$$\boxed{g(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \dfrac{\lambda^{\alpha}\mathrm{e}^{-\lambda x}x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & x>0 \end{cases}}$$

gde su α i λ pozitivni realni brojevi, tada kažemo da X ima **gama raspodelu sa parametrima** α **i** λ i pišemo X: $\Gamma(\alpha, \lambda)$. Naziva se i **dvoparametarska gama raspodela**.

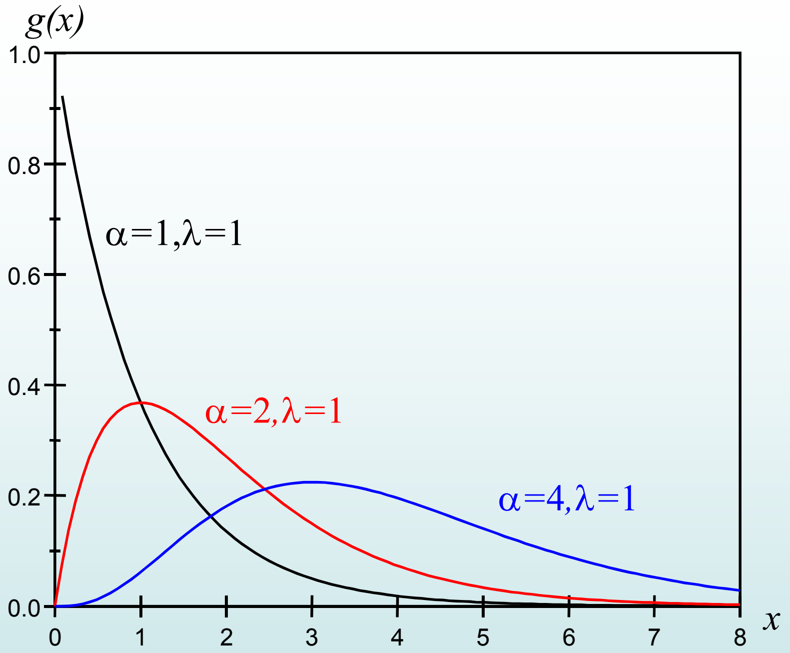
- Ako je X: $\Gamma(\alpha, \lambda)$, matematičko očekivanje je

$$E(X)=\frac{\alpha}{\lambda}$$

- disperzija je

$$D(X)=\frac{\alpha}{\lambda^2}$$

Gustina dvoparametarske gama raspodele



Gama raspodela, nastavak

- Ako su sp X_1: $\Gamma(\alpha_1, \lambda)$ i X_2: $\Gamma(\alpha_2, \lambda)$ sa gama raspodelama sa istim parametrom λ nezavisne, tada i njihov zbir X_1+X_2 ima gama raspodelu $\Gamma(\alpha_1+\alpha_2, \lambda)$.
- Za $\alpha=1$ se dobija eksponencijalna raspodela $\varepsilon(\lambda)$.
- Za $\alpha\in N$ se dobija Erlangova raspodela.
- Za $\alpha=n/2$ i $\lambda=1/2$ dobija se χ^2 - raspodela.
- Za $\lambda=1$ imamo tzv. ***jednoparametarsku gama raspodelu***.
- Ako X:$\Gamma(\alpha,\lambda)$ i $Y=X+c$, tada je gustina raspodele sp Y

$$\boxed{g_Y(x) = \begin{cases} 0, & x \le c \\ \dfrac{\lambda^{\alpha} e^{-\lambda(x-c)}(x-c)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & x > c \end{cases}}$$

Troparametarska gama raspodela $\Gamma(\alpha,\lambda,c)$